

Gough 疲劳极限条件在一般复杂应力下的推广*

杜云海

(郑州工学院数力系)

摘 要: 本文将弯扭复合应力下的疲劳极限条件——Gough经验椭圆方程^[1]推广到二向及三向主变应力的情况。导出的结果与由剪切应变能强度理论得来的结果^[2]相比,能够反映材质的不同对疲劳极限条件的影响。

关键词: 疲劳极限, 复杂应力

中国图书分类号: O346

许多机械零部件都在交变的复杂应力下工作,如轴类部件受弯曲与扭转的复合变应力,压力管道受二向变应力等。这些承受交变复杂应力的机械零部件的疲劳强度计算与设计依赖于相应的疲劳极限条件。

Gough 在不同钢种的弯扭复合疲劳试验的基础上导出的疲劳极限条件^[1]

$$\sqrt{\sigma^2 + \frac{1}{R^2} \tau^2} = \sigma_{-1} \quad (1)$$

使轴类部件的疲劳强度计算问题得到解决。这里, σ 为对称弯曲应力幅, τ 为对称扭转应力幅, $R = \tau_{-1} / \sigma_{-1}$ 为扭转疲劳极限与弯曲疲劳极限的比值。式(1)表示一椭圆曲线,其形状取决于 R 值。不同的材料会有不同的 R 值,因而该条件能够反映材质对疲劳极限曲线的影响。

对于一般复杂应力的情况,在 Timoshenko 的著作^[2]中,由变形能强度理论的屈服条件推广出的二向应力及三向应力下的疲劳极限条件分别为

$$\sigma_1 \sqrt{1 - \alpha + \alpha^2} = \sigma_{-1} \quad (2)$$

及
$$\sigma_1 \sqrt{1 - \alpha - \alpha_1 + \alpha^2 + \alpha_1^2 - \alpha \alpha_1} = \sigma_{-1} \quad (3)$$

其中, $\alpha = \sigma_2 / \sigma_1$, $\alpha_1 = \sigma_3 / \sigma_1$; σ_1 , σ_2 , σ_3 为主变应力幅, σ_1 为最大主变应力幅。式(2)及(3)分别表示具有固定形状的椭圆曲线和空间圆柱面,它们不能反映材质对疲劳极限曲线(或曲面)形状的影响。问题还在于对不同材料应用条件(2)和(3)时,并不能保证都是

* 收稿日期: 1991-9-2

偏于安全的。

Forrest 列举了各类材料的 R 值^[3], 它们各有一定的变化范围, 譬如, 锻钢的 R 值为 0.52—0.69。锻钢之 R 值的这一变化范围所对应的二向应力下的疲劳极限曲线的形状的变化在本文中可以看到(图 3)。若从 Gough 疲劳极限条件(1)推广出二向及三向应力下的疲劳极限条件, 会使式 (2) 和 (3) 在这方面的不足得到改善, 而且, 式 (2) 和 (3) 是推广的 Gough 疲劳极限条件的一种特殊情况。

式 (1)、(2) 和 (3) 限于诸应力分量是同相变化的。对于诸应力分量有相位角的情形, 弯扭复合疲劳试验的结果^[4]表明, 有相位角时的疲劳极限高于同相情况下的疲劳极限, 即以同相情况下的疲劳极限作为设计的依据是偏于安全的。因此, 本文的推导也限于诸应力分量是同相变化的, 文中出现的应力幅符号表示代数量。

1 Gough 条件的推广

把 Gough 疲劳极限条件(1)推广到一般复杂应力的情况时, 仅考虑对称交变应力的情形, 从一般平面应力情况着手, 导出二向及三向应力下的疲劳极限条件。

1.1 一般平面应力情况

设 σ_x 、 σ_y 和 τ_{xy} 为处于一般平面应力对称交变作用下的一点的三个应力分量的应力幅, 用单元体表示于图 1(a)。对应的疲劳极限条件应为一曲面方程。分别将 $\sigma_y=0$ (图 1(b)) 和 $\sigma_x=0$ (图 1(c)) 时的 σ_x 、 τ_{xy} 和 σ_y 、 τ_{xy} 代入式(1), 可以得到该曲面与坐标平面 $\sigma_y=0$ 和 $\sigma_x=0$ 的两条椭圆形交线方程

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \frac{1}{R^2} \tau_{xy}^2} = \sigma_{-1} \quad (a)$$

$$\sqrt{\sigma_y^2 + \frac{1}{R^2} \tau_{xy}^2} = \sigma_{-1} \quad (b)$$

或改写成
$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_{-1}^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{\tau_{-1}^2} = 1 \quad (c)$$

$$\frac{\sigma_y^2}{\sigma_{-1}^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{\tau_{-1}^2} = 1 \quad (d)$$

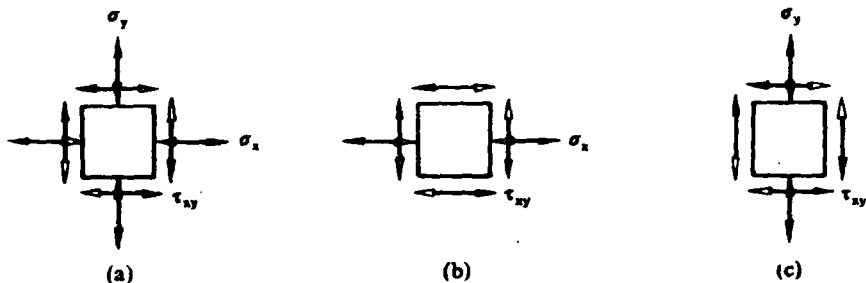


图 1

设一般平面应力下的疲劳极限曲面方程为

$$A_{11}\sigma_x^2 + A_{22}\sigma_y^2 + A_{33}\tau_{xy}^2 + A_{12}\sigma_x\sigma_y + A_{13}\sigma_x\tau_{xy} + A_{23}\sigma_y\tau_{xy} + B_1\sigma_x + B_2\sigma_y + B_3\tau_{xy} + C = 0 \quad (c)$$

在式(c)中, 分别令 $\sigma_y = 0$ 和 $\sigma_x = 0$ 并与式(c)和(d)比较系数知

$$A_{11} = A_{22} = \frac{1}{\sigma_{-1}^2}, \quad A_{33} = \frac{1}{\tau_{-1}^2},$$

$$A_{13} = A_{23} = B_1 = B_2 = B_3 = 0, \quad C = -1$$

于是式(c)成为

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_{-1}^2} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{-1}^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{\tau_{-1}^2} + A_{12}\sigma_x\sigma_y - 1 = 0 \quad (f)$$

为确定式(f)中的 A_{12} , 可考虑将纯剪应力转变为主变应力得疲劳极限曲面上的一点 $A(\tau_{-1}, -\tau_{-1}, 0)$, 也可考虑将单向应力转变为一般平面应力得疲劳极限曲面上的另一点

$B(\frac{\sigma_{-1}}{2}, \frac{\sigma_{-1}}{2}, \frac{\sigma_{-1}}{2})$, 将 A 或 B 任一点的坐标代入式 (f) 中都可定出

$$A_{12} = \frac{2}{\sigma_{-1}^2} - \frac{1}{\tau_{-1}^2}$$

于是, 式 (c) 的具体形式为

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_{-1}^2} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{-1}^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{\tau_{-1}^2} + (\frac{2}{\sigma_{-1}^2} - \frac{1}{\tau_{-1}^2})\sigma_x\sigma_y = 1 \quad (4)$$

或改写为

$$\sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 + \frac{1}{R^2}(\tau_{xy}^2 - \sigma_x\sigma_y)} = \sigma_{-1} \quad (5)$$

这便是 Gough 疲劳极限条件在一般平面应力下的推广结果。它的几何图形为一椭球面, 如图 2 所示。该椭球面关于平面 $\tau_{xy} = 0$ 为对称。

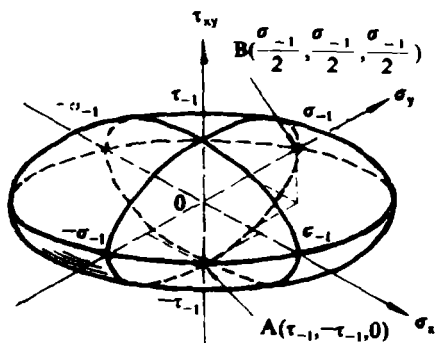


图 2

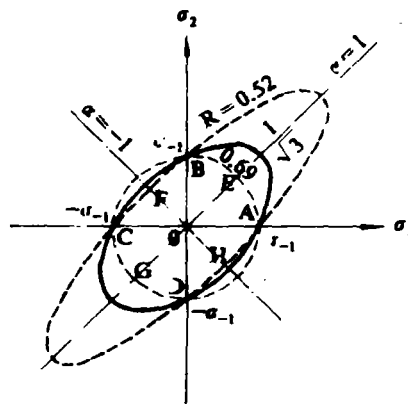


图 3

1.2 二向应力情况

一般平面应力情况归结为二向主变应力情况, 同时, 二向应力情况又是一般平面应力情况在剪应力为零时的特殊情形, 因此, 只要在式 (4) 或 (5) 中令 $\tau_{xy}=0$, 并以主变应力幅 σ_1 、 σ_2 代替 σ_x 、 σ_y 即得二向应力下的疲劳极限条件

$$\frac{1}{\sigma_{-1}^2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \left(\frac{2}{\sigma_{-1}^2} - \frac{1}{\tau_{-1}^2}\right)\sigma_1\sigma_2 = 1 \quad (6)$$

或

$$|\sigma_1| \sqrt{(1 + \alpha)^2 - \alpha / R^2} = \sigma_{-1} \quad (7)$$

其中 σ_1 为绝对值最大的主变应力幅。

若 $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (此值是变形能强度理论对弯曲和剪切时两者的屈服点应力之比给出的),

式 (7) 即与式 (2) 一致; 对于弯扭复合应力的情况, 将

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\tau^2}{\sigma^2}}\right), \quad \alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1 - \sqrt{1 + 4 \frac{\tau^2}{\sigma^2}}}{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\tau^2}{\sigma^2}}}$$

代入式 (7) 即得式 (1)。

式 (6) 或 (7) 的几何图形为长轴与直线 $\sigma_1 = \sigma_2$ 重合, 短轴与直线 $\sigma_1 = -\sigma_2$ 重合的椭圆。

图 3 中绘出了对应于 $R = 0.52$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 和 0.69 的三个椭圆, 由此便可看出椭圆形状受 R 值大小的影响。对各种锻钢都适用的偏于安全的疲劳极限曲线应当是 $R = 0.52$ 和 $R = 0.69$ 两椭圆的公共包围区的边界线 AEBFCGDH, 而用 $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 对应的椭圆作为唯一的疲劳极限曲线, 不能保证对任何材料和任意的应力比 α 都偏于安全。

1.3 三向应力情况

用 σ_2 、 σ_3 及 σ_3 、 σ_1 分别代替式 (6) 或 (7) 中的 σ_1 、 σ_2 , 连同式 (6) 或 (7), 可得三向应力下的疲劳极限曲面与坐标平面 $\sigma_1 = 0$ 、 $\sigma_2 = 0$ 和 $\sigma_3 = 0$ 的三条椭圆交线的方程。用与 1.2 中类似的推导方法可导出由 Gough 疲劳极限条件推广来的三向应力下的疲劳极限条件为

$$\frac{1}{\sigma_{-1}^2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + \left(\frac{2}{\sigma_{-1}^2} - \frac{1}{\tau_{-1}^2}\right)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = 1 \quad (8)$$

或

$$|\sigma_1| \sqrt{(1 + \alpha + \alpha_1)^2 - (\alpha + \alpha_1 + \alpha\alpha_1) / R^2} = \sigma_{-1} \quad (9)$$

若近似地取 $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 式 (9) 与式 (3) 一致。

疲劳极限曲面方程 (8) 或 (9) 在 $R = \tau_{-1} / \sigma_{-1}$ 小于 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 、等于 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 和大于 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时几何图形分别为 $0-\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ 坐标系中以直线 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ 为旋转轴的单叶旋转双曲面、圆柱面

和旋转椭球面,如图 4 (a)、(b)、(c) 所示。

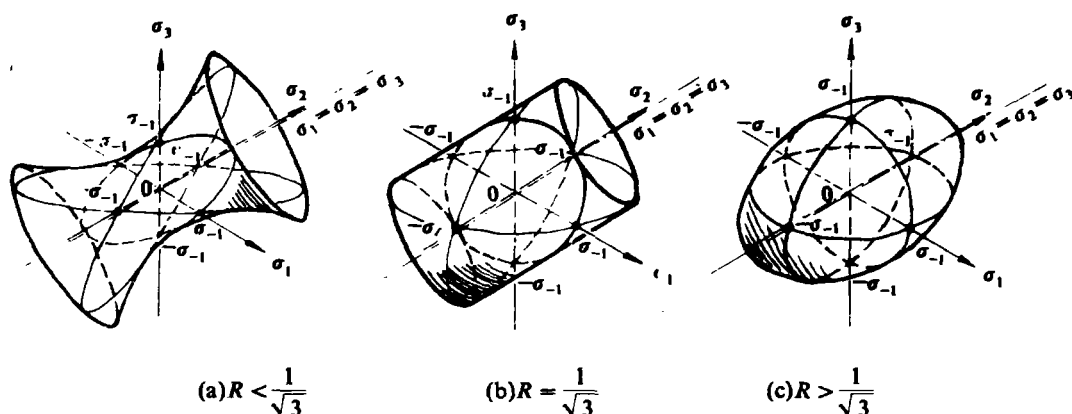


图 4

2 讨论及实验比较

2.1 讨论

Frith 等人对钢的纵向疲劳强度与横向疲劳强度做过许多比较,发现横向疲劳强度低于纵向疲劳强度,其差异随钢的强度变大而增大。对于钢材纵向疲劳强度的不同取值范围,横向疲劳强度降低的百分数的平均值及最大值如表 1 所示。

表 1 钢的横向疲劳强度的降低⁽³⁾

纵向疲劳强度 MPa(tons/in ²)	横向疲劳强度平均降低 $\bar{\delta}(\%)$	数据个数	最大降低量 $\delta_{\max}(\%)$
< 304(< 20)	15	15	26
304~456(20~30)	17	16	31
456~608(30~40)	20	23	45
> 608(> 40)	29	13	41

在使用疲劳极限条件时,应当考虑材料的这种各向异性。从安全的角度出发,1 中出现的 σ_{-1} 可取为材料的横向疲劳强度,若缺乏横向疲劳强度的试验数据,可以将纵向疲劳强度乘以适当的折算系数来估计,即

$$\sigma_{-1} = (\sigma_{-1})_T = \gamma(\sigma_{-1})_L \quad (10)$$

其中, $(\sigma_{-1})_L$ 为材料的纵向疲劳强度, $(\sigma_{-1})_T$ 为材料的横向疲劳强度, γ 为折算系数,可以取

$$\gamma = 1 - \bar{\delta} \quad (11)$$

相应地,扭、弯疲劳极限之比可表示为

$$R = \tau_{-1} / [\gamma(\sigma_{-1})_L] \quad (12)$$

对于脉动应力的情况,可以用脉动疲劳强度 σ_0 代替 1 中出现的 σ_{-1} 进行计算。一般

的非对称循环和有应力集中的情况,可按通常的方法,以当量应力代入到1中的疲劳极限条件中去进行计算。

2.2 实验比较

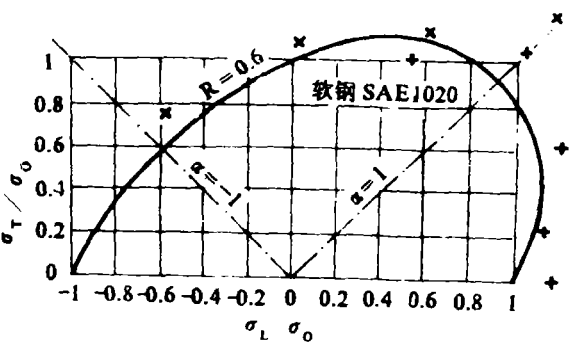
三向应力下的推广结果(式(8)或(9))尚无与之比较的实验资料。二向应力下的推广结果(式(6)或(7))与实验的比较,可借用参考文献[3]中的一组二向应力疲劳试验数据,如表2所示。试验所用的试件为用软钢SAE1020制成的内径为1in,外径为1.1in.的薄壁圆管,加载方式为脉动内压力与脉动轴力的复合。实验数据基于疲劳极限。

表2 薄壁管的疲劳强度⁽³⁾

材 料	抗拉强度 MPa(tons / in ²)	环向应力范围 MPa(tons / in ²)	轴向应力范围 MPa(tons / in ²)
SEA1020 退火		—	274(18)
		53.2(3.5)	266(17.5)
		144(9.5)	281(18.5)
		236(15.5)	122(8)
		234(16)	243(16)
SEA1020 退火	426(28)	175(11.5)	-137(-9)
		251(16.5)	7.60(0.5)
		266(17.5)	144(9.5)
		281(18.5)	274(18)

由表2及表1,取 $\sigma_0 = \gamma(\sigma_0)_L = 0.85 \times 274 = 233\text{MPa}$,且参照[3],取R为锻钢的扭、弯疲劳极限之比的平均值, $R = 0.6$ 。以 σ_0 代替式(7)中的 σ_{-1} ,且以 σ_L / σ_0 和 σ_T / σ_0 (σ_L 和 σ_T 分别为轴向及环向应力范围)为坐标绘出的实验点及疲劳极限曲线如图5所示。

由图5看出,多数实验点位于所绘的疲劳极限之外,因而由该曲线表示的疲劳极限条件是偏于安全的。



+莫里卡瓦和格里菲斯
×梅杰斯,米尔斯和麦格雷戈

图5

3 结 论

3.1 将弯扭复合应力下的 Gough 经验疲劳极限条件推广到二向及三向主变应力的情况。由于推广结果中含材料的扭、弯疲劳极限比值 R ，因而使疲劳极限条件能够反映不同材质对它的影响。

3.2 从剪切应变能理论得来的疲劳极限条件是本文推广结果在 $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时的特殊情形。

3.3 在疲劳极限条件中以材料的横向疲劳强度代替 σ_{-1} ，可使疲劳极限条件偏于安全。

3.4 三向主变应力下的 Gough 条件推广结果尚待进一步试验验证。

参 考 文 献

- (1) 刘鸿文. 材料力学(下册). 人民教育出版社. 1979.
- (2) S. 铁摩辛柯著, 汪一麟译. 材料力学(高等理论及问题). 科学出版社. 1979
- (3) P. G. Forrest. Fatigue of Metals. Pergamon Press. 1962
- (4) 徐颢. 疲劳强度设计. 机械工业出版社. 1981

Popularization of Gough's Fatigue Limit Equation under General Complex Stress

Du yunhai

(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: This paper popularizes the Gough's fatigue limit Eq. empirical ellipse quadrant, under the combined bending and torsion to the case of biaxial and triaxial stress. Derived results are able to reflect the influence of the quality of a material to them, compared with the result from the shear strain energy strength theory.

Keywords: Fatigue limit, complex stress