第13卷 第3期 郑州工学院学报 Vol.13 No.3
1992年 9 月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Sep. 1992

非线性拟抛物型方程的初边值问题周期边值问题与初值问题*

杨志坚
(郑州工学院数力系)

摘 要: 本文用Galirkin方法和Sobolev型估计，研究了一类非线性拟抛物型方程.
$U_t - a_1(t)U_{xxt} - a_2(t)U_{xx} = f(x, t, U, U_x)$的初值边值问题，周期边值问题和初值问题的古典解的存在性，唯一性和稳定性.

关键词: 拟抛物型方程，初值边值问题，算子.
中国图书分类号: 0175

研究与粘滞液体流动有关的某些物理问题时，经常出现其主部包含微分算子 U_t-U_{xxt} 的非线性的拟抛物型方程.

文'1'对相当广泛的一类非线性拟抛物方程组,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(U+(-1)^M A\frac{\partial^{2M} U}{\partial x^{2M}}\right)=f(U,\ U_x,\ \cdots,\ U_{x^{2M}}) \tag{1}$$

的周期解，初值问题的广义解和古典解的存在唯一性，作了深入的研究。

本文采用 Galerkin 方法，在不同的条件下，讨论了一类非线性拟抛物型方程

$$U_t - a_1(t)U_{xxt} - a_2(t)U_{xx} = f(x,\ t,\ U,\ U_x) \tag{2}$$

的初边值问题

$$U(0,\ t)=0,\ U(l,\ t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant T,$$
$$U(x,\ 0)=\varphi(x),\ 0\leqslant x\leqslant l \tag{3}$$

周期边值问题

$$U(x,\ t)=U(x+l,\ t),\ 0\leqslant t\leqslant T$$
$$U(x,\ 0)=\varphi(x), \tag{4}$$

(其中，$\varphi(x)$，$f(x, t, p_1, p_2)$ 为关于 x 的以 l 为周期的函数),与初值问题

$$U(x,\ 0)=\varphi(x),\ -\infty<x<+\infty \tag{5}$$

的古典解的存在唯一性及稳定性.

我们用$W_p^k[a, b]$表示 Sobolev 空间，简记$H^k[a, b]=W_2^k[a, b]$，$\|U\|=\|U\|_{L_2}$. 首先考虑初边值问题 (2)，(3).

---

* 收稿日期: 1990—08—30

1　先验估计

作问题(2)，(3)的近似解 $U_N(x,t)=\sum_{j=1}^{N}T_{jN}(t)y_j(x)$，其中$\{y_j(x)\}$是特征值问题 $y''+\lambda y=0$，$y(0)=y(l)=0$ 对应于特征值$\lambda_j=\beta_j^2(j=1,2,\cdots)$的特征函数组成的规范的完备正交系，则 $T_{jN}(t)$满足常微分方程初值问题

$$(U_{Nt},y_j)-a_1(t)(U_{Nx^2t},y_j)-a_2(t)(U_{Nx^2},y_j)=(f(x,t,U_N,U_{Nx}),y_j),$$
$$(U_N(x,0),y_j)=\varphi_j,\quad j=1,2,\cdots N \tag{6}$$

其中$(U,V)=\int_0^l U(x)V(x)dx$，$\varphi_j=(\varphi(x),y_j)$.

引理 1.

设(1)　$a_1(t)$，$a_2(t)\in C'(,T]$，$a_1(t)>0$，$t\in[0,T]$.

(2)　$f(x,t,u,u_x)$关于各变量连续并且

$\|f\|_{L_2[0,l]}\leqslant k_1\|U^m\|_{L_2[0,l]}+k_2\|(U_x)^n\|_{L_2[0,l]}+k_3$，其中常数 $k_j>0$，$j=1,2,3$，m，$n>1$.

(3)　$\lim_{N\to\infty}E_N(0)=b<\infty$，其中$E_N(0)=\sum_{j=1}^{N}[(1+\beta_j^2\varphi_j^2+a_1(0)(\beta_j^2+\beta_j^4)\varphi_j^2]+1$.

则存在常数 $t>0$，问题（6）的解在$[0,t^*]$上存在并且关于 $t\in[0,t^*]$一致的有

$$\|U_N\|_{H^2[0,l]}\leqslant M,\quad \|U_N\|_{C[0,l]}\leqslant M \tag{7}$$
$$\|U_{Nt}\|_{H[0,l]}\leqslant M,\quad \|U_{Nt}\|_{C[0,l]}\leqslant M \tag{8}$$

这里及以下,M 均表示不依赖于 N 的常数.

证明：方程（6）二端分别同乘以 T_{jN}，$\beta_j^2T_{jN}$对 j 从 1 至 N 求和，而后将得到的二个微分等式相加，记$E_N(t)=\|U_N\|^2+a_1(t)(\|U_{Nx}\|^2+\|U_{Nxx}\|^2)+\|U_{Nx}\|^2+1$，利用条件（2）及 Gagliado-Nirenberg 不等式[2]得到

$$\frac{d}{dt}E_N=2(f,\ U_N-U_{Nxx})+(a'_1(t)-2a_2(t))(\|U_{Nx}\|^2+\|U_{Nxx}\|^2)\leqslant\|f\|^2$$
$$+C_1E_N\leqslant C_2(E_N^m+E_N^n)+C_1E_N\leqslant C_3E_N^P \tag{9}$$

其中 $P=\max\{m,n,1\}$由（9）得到

$$E_N(t)\leqslant E_N(0)(1-C_3(P-1)E_N(0)^{P-1}t)^{-\frac{1}{P-1}}\leqslant b(1-C_3(P$$
$$-1)b^{P-1}t)^{-\frac{1}{P-1}}$$

故取$t_b=(C_3(P-1)b^{P-1})^{-1}$，$0<t^*<t_b$，则关于 $t\in[0,t^*]$一致的有 $E_N(t)<M$，所以(7)成立并且方程(6)的右端项对所有可能的解在$[0,t^*]$上是一致有界的，故（6）的解在

[0, t^*]上存在. 方程 (6) 二端同乘以$\dot{T}_{jN}$对 j 从 1 到 N 求和, 利用 Holder 不等式和(7)得到

$$\|U_{Nt}\|^2 + a_1(t)\|U_{Nxt}\|^2\| \leqslant (|a_1|\|U_{Nxx}\| + \|f\|)\|U_{Nt}\| \leqslant C_4\|U_{Nt}\|$$

由此及 Sobolev 嵌入定理知(8)成立, 证毕.

注 1. 当 m = n = 1 时, 由 (9) 可知, 对 ∀T > 0, 引理 1 的结论在[0, T]上成立.

注 2. $\lim\limits_{N\to\infty} E_N(0) = b < \infty$等价于$\varphi(x)\in H^2[0,l]\bigcap H_0^1[0,l]$.

引理 2.设 (1) 引理 1 的条件 (1), (2) 成立, f(x, t, p_1, p_2)关于 x, p_1, p_2 二次连续可导, f (0, t, 0, p_2) = f (l, t, 0, p_2) = 0.

(2) $\varphi(x)\in H^4[0,l]$, $\varphi^{(2k)}(0) = \varphi^{(2k)}(l) = 0$, $k = 0, 1$.

则关于 t∈[0, t^*]一致的有

$$\|U_N\|_{H^4[0,l]} \leqslant M,\quad \|U_N\|_{C^3[0,l]} \leqslant M \tag{10}$$

$$\|U_{Nt}\|_{H^4[0,l]} \leqslant M,\quad \|U_{Nt}\|_{C^3[0,l]} \leqslant M \tag{11}$$

证明: 方程 (6) 二端分别同乘以 T_{jN}, $\beta_j^6 T_{jN}$对 j 从 1 到 N 求和, 而后将得到的二个微分等式相加, 记$F_N(t) = \|U_N\|^2 + \|U_{Nx^3}\|^2 + a_1(t)(\|U_{Nx}\|^2 + \|U_{Nx^4}\|^2)$, 利用引理 1 及文献[3]中引理 4 得到

$$\frac{d}{dt}F_N(t) \leqslant M_1 + C_5\|U_{Nx^4}\|^2 + \|f_{xx}\|^2 \leqslant M_1 + C_6(\|U_{Nx^4}\|^2 + \|U_N\|^2_{H^3})$$

$$\leqslant M_1 + C_7F_N(t) \tag{12}$$

注意到 $F_N(0)$的一致有界性, 利用 Gronwall 不等式可知 (10) 成立.

方程 (6) 二端同乘以$\beta_j^6\dot{T}_{jN}$对 j 求和并利用 Hölder 不等式(10)得到

$$\|U_{Nx^3t}\|^2 + a_1(t)\|U_{Nx^4t}\|^2 \leqslant (|a_2|\quad \|U_{Nx^4}\| + \|f_{xx}\|)\|U_{Nx^4t}\|$$

$$\leqslant C_8\|U_{Nx^4t}\| \tag{13}$$

由(13), (8) 可知, (11) 成立. 引理 2 证毕.

由估计式 (7), (8) 可得$\|T_{jN}(t)\|_{C^1[0,t^*]} \leqslant M$, 故可从序列{$T_{jN}$}中抽出收敛的子列{$T_{jNi}$}, 使关于 t∈[0,$t^*$]一致的有$\lim\limits_{N_i\to\infty} T_{jN_i}(t) = T_j(t)$, j = 1, 2, …, 记

$U(x, t) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} T_j(t)y_j(x)$, 则有

引理 3. 设引理 2 的条件成立, 则有

(1) 级数$\sum\limits_{j=1}^{\infty}\beta_j^{2k}T_j^2$在[0,$t^*$]上收敛, k = 0, 1, …, 4.

(2) 关于$(x,t)\in Q_{t^*} = [0,l]\times[0,t^*]$一致的有, $\lim\limits_{N_i\to\infty} U_{N_ix^k} = U_{x^k}$, k = 0, 1, 2.

(3) $T_j(t)$是下面初值问题在[0,t^*]上的解

$$(1 + a_1(t)\beta_j^2)\dot{T}_j + a_2(t)\beta_j^2T_j - (f(x,t,U,U_x),y_j) = 0 \tag{14}$$

$T_j(0)=\varphi_j,\ j=1,2,3,\cdots.$

证明;(1)规定 $T_{jNi}=0$, $j>N_i$. 记 $S_n^k(t)=\sum_{j=1}^{n}\beta_j^{2k}T_j^2(t)$, 取 $N_i>n$ 且 N_i 充分大, 则有

$$S_n^k\leqslant\sum_{j=1}^{n}\beta_j^{2k}|T_{jNi}^2-T_j^2|+\sum_{j=1}^{n}\beta_j^{2k}T_{jNi}^2\leqslant 1+\|U_{Nix^k}\|^2\leqslant M,\ t\in[0,t^*]$$

其中 $k=0,1,\cdots,4$ 故 (1) 成立

(2) 以 $k=2$ 为例证明, 事实上

$$|U_{N_ix^2}-U_{x^2}|\leqslant|\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2(T_{jN_i}-T_j)y_j|+|\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j^2T_{jN_i}y_j|$$

$$+|\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j^2T_jy_j| \tag{15}$$

由 (1)知 $|T_{jN_i}|\leqslant M\beta_j^{-4}$, $|T_j|\leqslant M\beta_j^{-4}$, $t\in[0,t^*]$, 故作为收敛级数的余项, 对 $\forall\varepsilon>0$, 当 n 充分大时, (15) 中的最后二项之和小于 $2^{-1}\varepsilon$, 固定 n, 在 (15) 中令 $N_i\to\infty$可知关于$(x,t)\in Q_{t^*}$ 一致的有$|U_{N_ix^2}-U_{x^2}|<\varepsilon$.

同法可证(2)的其余情况.

(3) 易知 T_{jNi} 满足与(6)等价的积分方程

$$T_{jN_i}=\varphi_j-\int_0^t(1+a_1(\tau)\beta_j^2)^{-1}[a_2\beta_j^2T_{jNi}-(f(x,\tau,u,U_{N_i},U_{N_ix}),y_j)]d\tau$$

而

$$|T_j-\varphi_j+\int_0^t(1+a_1(\tau)\beta_j^2)^{-1}[a_2\beta_j^2T_j-(f(x,\tau,U,U_x),y_j)]d\tau\leqslant\|T_j-T_{jNi}\|_{C[0,t^*]}$$

$$+\max_{t\in[0,t^*]}(1+a_1\beta_j^2)^{-1}(|a_2|\beta_j^2t^*)\|T_{jNi}-T_j\|_{C[0,t^*]}+[\min_{t\in[0,t^*]}(1$$

$$+a_2\beta_j^2)^{-1}t^*]\|(f(x,\tau,U_{Ni},U_{NIx})-f(x,\tau,U,U_x),y_j)\|_{C[0,t^*]}$$

$\to0$, $t\in[0,t^*]$, $N_i\to\infty$, 故 $T_j(t)$满足方程

$$T_j(t)=\varphi_j-\int_0^t(1+a_1\beta_j^2)^{-1}[a_2\beta_j^2T_j-(f(x,\tau,U,U_x),y_j)]d\tau$$

上式对 t 微分一次即得(3)的结论.

2 初边值问题

定理 1. 设引理 2 的条件成立, 则初边值问题 (2), (3) 在$Q_{t^*}=[0,l]\times[0,t^*]$上存在古典解$U(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}T_j(t)y_j(x)$, 其中$T_j(t)=\lim_{N_i\to\infty}T_{jNi}$是问题(14)在$[0,t^*]$上的解

证明: 由方程 (6) 可知,

$$(1+a_1(t)\beta_j^2)\dot{T}_{jNi}=-a_2\beta_j^2T_{jNi}+\ (f\ (x,\ t,\ U_{Ni},\ U_{Nix})\ ,\ y_j)$$

令 $N_i\to\infty$，由引理 3 及极限的唯一性可知，关于 $t\in[0,t^*]$一致的有，$\lim\limits_{N_i\to\infty}T_{jNi}=T_j$，类似于引理 3 的证明可得：级数$\sum\limits_{j=1}^{\infty}\beta_j^{2k}T_j^2$在$[0,\ t^*]$上收敛，$k=0,\ 1,\ \cdots,\ 4$，且关于$(x,t)\in Q_{T^*}$一致的有$\lim\limits_{N_i\to\infty}U_{Nix^kt}=U_{x^kt}$，$k=0,\ 1,\ 2$．用算子$\frac{\partial}{\partial t}-a_1\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}-a_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-f(x,\ t,\ (\quad),\ \frac{\partial}{\partial x}(\quad))$作于 U 得到

$$U_t-a_1U_{xxt}-a_2U_{xx}-f(x,\ t,\ U,\ U_x)=C(x,\ t)\tag{16}$$

由引理 3 知 C 是一连续函数，(16)二端用 $y_j(x)$作内积并利用(14)得到$(C(x,\ t),\ y_j(x))\equiv0$；由$\{y_j(x)\}$的完备性可知 $C(x,\ t)\equiv0$，$(x,\ t)\in Q_{t^*}$．定理 1 证毕．

利用常用的唯一性证明方法及 Gronwall 不等式不难得到

定理 2. 设定理 1 的条件成立，则问题 (2)，(3) 在Q_{t^*}上的解对初始函数是连续依赖的，即如果 U_1，U_2 分别是问题(2)、(3)对应于初始函数 φ_1，$\varphi_2(x)$的二个解，则对$\forall\varepsilon>0$，$R>0$，存在$\delta=\delta(\varepsilon,\ R)>0$，当$\|\varphi_i\|_{H^2}\leqslant R$，$(i=1,\ 2)$ $\|\varphi_1-\varphi_2\|_{H^2}<\delta$时，

$$\sup_{t\in[0,t^*]}\|U_1-U_2\|_{H^2[0,l]}<\varepsilon,\quad \sup_{t\in[0,t^*]}\|U_1-U_2\|_{C^1[0,l]}<\varepsilon$$

并且问题(2)、(3)在Q_{t^*}上的古典解是唯一的．

3 周期边值问题与初值问题

对周期边值问题(2)、(4)，经过类似于定理 1，2 的证明，我们得到

定理 3. 设 (1) a_1，$a_2\in C^1[0,T]$，$a_1(t)>0$，$t\in[0,T]$

(2) $f(\ x,\ t,\ U,\ U_x\ )$关于各变量连续，关于 x，U，U_x 二次连续可微，$\|f\|_{L_2[0,l]}\leqslant k_1\|U^m\|_{L_2[0,l]}+k_2\|(U_x)^n\|_{L_2[0,l]}+k_3$，$k_i\geqslant0$，$m$，$n\geqslant1$为常数，并且 $\varphi(x)\in H^4[0,l]$

则周期边值问题(2)，(4)在Q_{t^*}上存在唯一的古典解并且它连续地依赖于初始函数$\varphi(x)$(其意义同定理 2)

利用文[3]中由周期边值问题向初值问题过渡的方法，我们得到

定理 4. 设对 $\forall l>0$，定理 3 的条件 (1)，(2) 成立并且 $\varphi(x)\in H^4(-\infty,\ +\infty)\cap C(-\infty,\ +\infty)$，则存在常数 $t^*>0$，使初值问题 (2)，(5) 在$Q_{t^*}=(-\infty,\ +\infty)\times[0,t^*]$上存在唯一的古典解．

注 2. 由注 1 可知，当 $m=n=1$ 时，对 $\forall T>0$，问题 (2)，(3)；(2)，(4) 在 $Q_T=[0,l]\times[0,T]$上存在唯一的整体古典解并且连续依赖于初始函数，问题 (2)，(5) 在 $Q_T=(-\infty,\ +\infty)\times[0,T]$上存在唯一的整体古典解． (下转 39 页)

〔5〕 吴慧敏．结构混凝土现场检测技术．湖南大学出版

〔6〕 Sidney Mindess. J.Francis Young, Concrete Practice—Hall INC. Englewood Cliffs. New Jersey 07632,1981.

Practical Non—destructive Method for Testing Flexural Strength of Concrete Pavement

Wei Jun　Zhou zhigin　Zhao Yongyi　Nie Jianguo

Abstract: On the basis of a great amount of experiment, the relationships between fkexural strength of concrete and non—destructive testing data, Schmidt rebound and ultrosanic velocity, have been established, and the effects of defferent experimental condition to practical procedure for testing flexural strength of concrete pavement is determined. Compared with testing results determined by standard testing method, the flexural strength of concrete determined by non—destruct method are accurate enough.This method can be used as a practical measure to controll concrete quality in pavement site.

Keywords: flexural strength of concrete, concrete pavement, non—destructive method

(上接 106 页)

参　考　文　献

〔1〕 周毓麟．符鸿源,高阶非线性拟抛物型方程组周期解和初值问题，中国科学A(1982). No. 2

〔2〕 Friedman. A. Partial Differential Eguations, New York, Academic Press (1969)

〔3〕 周毓麟．符鸿源．广义Sine—Gordon型非线性高阶双曲方程组，数学学报26(1983). N0.2

Initial—Boundary Value Problems and Periodic—Boundary Value Problems and Initial Value Problems for the Nonlinear Pseudo—Parablic Equations

Yang Zhijian

(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: In this paper, Using Galerkin method and soboler estimates, we discuss the existence, uniqueness and stability of the classical solutions of the first initial—boundary value problems and periodic—boundary problems and initial value problems for the nonlinear pseudo—parabolic equations $U_t - a_1(t)U_{xxt} - a_2(t)U_{xx} = f(x, t, U, U_x)$

Keywords: pseudo—parabolic equation, initial—boundary problem, operator.