第13卷 第3期 郑州工学院学报 Vol.13 No.3
1992年 9 月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Sep. 1992

n 维空间二次特征值问题的分解定理*

程水利 刘人杰

(河南省计经委) (郑州工学院

摘 要: n自由度线性阻尼振动系统的二次特征值问题，一般是在$2n$维空间求得复数精确解，或在小阻尼、弱非比例阻尼情况下，在 n 维空间求得近似解．本文提出并证明了一个分解定理，即在一定条件下，n 维空间二次特征值问题可化为 n 维空间两个普通特征值问题，用标准算法求得精确解．大大降低了解题难度，简化了计算方法，节约了计算时间．

关键词: 约当矩阵，克罗内克矩阵乘积，矩阵方程组．

中国图书分类号: O241

分析多自由度线性阻尼振动系统，无论是考查运动稳定性或动力响应，都要求解二次特征值问题 $(\lambda^2M+\lambda C+K)\ X=0$。当阻尼矩阵 C 可用正规模态解耦时，这个问题显得比较简单[1]．在一般情况下，二次特征值问题的精确解需要在 2n 维状态空间中进行[2][3]．文[4]用矩阵摄动法在 n 维空间获得了二次特征值问题的近似解．

本文提出并证明了一种在 n 维空间求解二次特征值问题精确解的新方法——分解法．即在一定条件下，在 n 维空间利用 Jordan[5]矩阵和 Kronecker[6]乘积证明了二次特征值问题可分解为两个普通特征值问题．于是即可利用特征值问题的标准算法[7]在 n 维空间计算特征值及特征向量的精确解．

1 分解定理

考虑 n 维空间二次特征值问题 $$(\lambda^2M+\lambda C+K)\ X=0 \tag{1}$$
其中 M、K 为任意实非奇异常矩阵，K，C 为任意实矩阵．不失一般性，可考虑如下特征值问题 $$(\lambda^2I+\lambda A+B)\ X=0 \tag{2}$$
其中 I 是单位矩阵．(2) 式的特征方程为
$$\det\ (\lambda^2I+\lambda A+B)\ =0 \tag{3}$$
分解定理: 如果状态矩阵满足

---

* 收稿日期: 1990-12-22

(1) $\frac{1}{4}A^2-B$正定， (4)

(2) $AB=BA$ (5)

则

$$\{\lambda|\det(\lambda^2 I+\lambda A+B)=0\}=\left\{\lambda\ \middle|\ \begin{array}{c}\det(\lambda I+\frac{1}{2}A-D)=0\\ 或\\ \det(\lambda I+\frac{1}{2}A+D)=0\end{array}\right\} \tag{6}$$

其中D满足$D^2=\frac{1}{4}A^2-B$.

为了证明分解定理和构造D矩阵，我们先证明两个引理.

引理1: 如果$\frac{1}{4}A^2-B$正定，则D存在，且$D^2=\frac{1}{4}A^2-B$.

证明: 由矩阵代数可知，任何一个矩阵都相似于一个*Jordan*矩阵。所以$(\frac{1}{4}A^2-B)$亦存在一个可逆矩阵P，使得下式成立:

$$P^{-1}(\frac{1}{4}A^2-B)P=J \tag{7}$$

其中J为*Jordan*矩阵.

$$J=\begin{bmatrix}J_1 & & & 0\\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_m\end{bmatrix},\qquad 1\leqslant m\leqslant n \tag{8}$$

$$J_j=\begin{bmatrix}r_j & & & \\ 1 & r_j & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & r_j\end{bmatrix},\quad j=1,2,\cdots,m$$

r_j $(j=1,2,\cdots m)$ 为 $(\frac{1}{4}A^2-B)$ 的全部特征根. 当 $(\frac{1}{4}A^2-B)$ 正定时，则

$$r_j>0\ ,\quad \forall j=1,2,\cdots,m. \tag{9}$$

J_j的维数等于r_j的重根数. 构造一Y矩阵:

$$Y=\begin{bmatrix}Y_1 & & & 0\\ & Y_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & Y_m\end{bmatrix} \tag{10}$$

其中

$$Y_j=\begin{bmatrix} \sqrt{r_j} & & & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{r_j}} & \sqrt{r_j} & & \\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & & \frac{1}{2\sqrt{r_j}} & \sqrt{r_j} \end{bmatrix}$$

则有：　$Y_j^2=J_j$，$Y^2=J$.　　(11)

令　$D=PYP^{-1}$　　(12)

则　$D^2=PJP^{-1}$　　(13)

将 (7) 式代入 (13)，可得　$D^2=\frac{1}{4}A^2-B$　证毕.

引理2：如果$AB=BA$，则 $(\lambda I+\frac{1}{2}A)D=D(\lambda I+\frac{1}{2}A)$.

证明：记　$U=(\lambda I+\frac{1}{2}A)D-D(\lambda I+\frac{1}{2}A)$　　(14)

于是只须证明$U=0$. 由已知条件可得　$UD+DU=0$　　(15)

将 (15) 式展成列向量，则　$\mathrm{Vec}(UD)+\mathrm{Vec}(DU)=0$　　(16)

即　$(D^T\otimes I+I\otimes D)\,\mathrm{Vec}U=0$　　(17)

这里$\otimes$表示 Kroneker 乘积 [6]. 按 Kroneker 乘积的性质，$(D^T\otimes I+I\otimes D)$ 的特征根具有如下型式：

$$\sqrt{r_i}+\sqrt{r_j}\ ,\quad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

由引理1知，　$\sqrt{r_i}+\sqrt{r_j}>0$ ，　$\forall i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$

于是　$\det(D^T\otimes I+I\otimes D)\neq 0$,

从而　$\mathrm{Vec}U=0$,　即　$U=0$　证毕.

分解定理证明：　由引理1，2可得

$$(\lambda^2I+\lambda A+B)=(\lambda I+\frac{1}{2}A-D)\cdot(\lambda I+\frac{1}{2}A+D)\ ,$$

即 $\det(\lambda^2 I+\lambda A+B)=\det(\lambda I+\frac{1}{2}A-D)\cdot\det(\lambda I+\frac{1}{2}A+D)$

于是 (6) 式成立．证毕．

2 结束语

从以上可以看出，在一定条件下，n维空间二次特征值问题通过分解实现线性化，化成n维空间两个普通特征值问题．而普通特征值问题即可用标准算法和标准通用程序很容易解决．这样，既降低了解题分析难度，简化了计算方法，节约了计算时间，并得到了满足实际需要的任意精确度的精确解．

参 考 文 献

〔1〕 Lord Rayleigh. Theory of Sound. Vol.1. Dever Publication. New York. N.Y. 1945

〔2〕 曹志浩．大型稀疏广义特征值问题的计算方法．振动与冲击．1984 第一期

〔3〕 谭忠棠，吴福光．多自由度线性系统阻尼受迫振动的统一解法．中山大学学报．1982．第一期

〔4〕 程水利．用矩阵摄动法求解二次特征值问题．中国航空学会．中国力学学会第二届振动会议论文集．1984，11

〔5〕 谢邦杰．线性代数．人民教育出版社.1978

〔6〕 H. Neudecker. A Note On Kroneker Matrix Products and Matrix Equations Systerms. SIAM.J.Appl.Math. Vel.17. No.3 1969

〔7〕 电子计算机常用算法．科学出版社．1976

Decomposition Theorem of Quadratic Eigenvalue Problems in N−Dimension Space

Shuili Cheng (Planning Economic Commission of Henan Province)

Renjie Liu (Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: The complex accurate solution of quadratic eigenvalue problems of n−freedom damped linear vibration sysytems, in the general cases, can be obtained in 2n−dimension space. And in the case of small damping or weak nonproportional damping, the real aproximate solution can be obtained in n−dimension space. In this paper, it is demonstrated that, if some conditionsare satisfied, the n−dimension quadratic eigenvalue problem can be changed into two n−dimension generalized eigenvalue problems. And then the real accurate solution can be obtained using the standard calculating methods.

Keywords: Jordan matrix, Kroneker matrix products, matrix equations systems.