第14卷 第1期　　郑 州 工 学 院 学 报　　Vol.14 No.1
1993年 1 月　　Journal of Zhengzhou Institute of Technology　　Mar. 1993

复合载荷作用下开顶扁球壳的非线性稳定性问题*

杨国战　苗同臣　(郑州工学院数力系)

杨荣根　(河南省建筑职工大学)

摘　要: 本文使用修正迭代法研究了在中心集中力和中心分布载荷联合作用下，具有硬中心的边缘固定的开顶扁球壳的轴对称线性稳定性问题，得到 P--Wm 特征关系式.

关键词: 扁壳，屈曲，稳定性.

中图分类号: TU31

在建筑和精密仪器的弹性元件等工程中，常使用具有硬中心的边缘固定的开顶扁球壳[1]．这种壳体受载荷作用时，在一定条件下会丧失稳定性．由于本问题涉及了非线性数学问题，所以给研究带来了巨大的困难．在处理该类问题时，一般采用修正迭代法[1~3]或摄动法[4]．文献[1、2]采用修正迭代分别讨论了具有硬中心的边缘固定的开顶扁球壳，仅仅受集中力或分布载作用时的轴对称非线性问题．文献[3]采用同样的方法讨论了复合载荷下圆底扁球壳非线性稳定性问题．

本文使用修正迭代法研究了受复合载荷作用具有硬中心的边缘固定的开顶扁球壳的非线性稳定性问题，包括了文献[1, 2]所做的工作，获得了较精确的解析解．

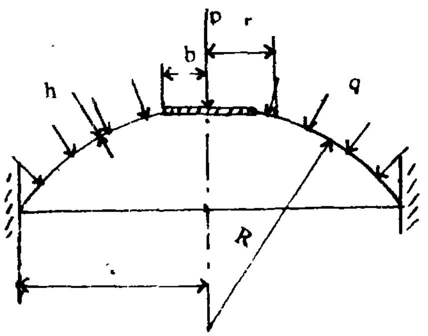

图 1

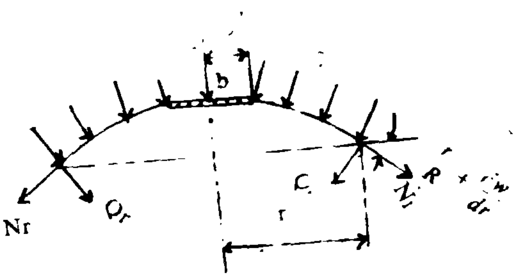

图 2

---

* 收稿日期: 1992-02-17

1 基本方程

考虑一个在中心受集中力P和分布载荷q作用下厚度为h，中曲面半径为R，内外缘半径分别为b、a的具有硬中心的开顶扁球壳（图1）。

在中心受集中力和分布载荷同时作用下，圆底扁球壳轴对称非线性微分方程为[1]：

$$\begin{cases} \frac{D}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dw}{dr})-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}[rN_r(\frac{r}{R}+\frac{dw}{dr})]=q \\ \frac{r}{Eh}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^2N_r)+\frac{d}{dr}(\frac{r}{R}+\frac{1}{2}\frac{dw}{dr})=0 \end{cases} \quad (2.1\ a.b)$$

其中r是扁球壳中曲面点至对称中心轴的距离，E是弹性模量，γ是泊松比，D是抗弯刚度：

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\gamma^2)} \quad (2.2)$$

求得W和N_r后，便可按下列公式计算径向薄膜位移u，径向弯矩M_r和径向剪力Q_r。

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{r}{Eh}[(1-\gamma)N_r+r\frac{dN_r}{dr}] \\ M_r&=-D(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{\gamma}{r}\frac{dw}{dr}) \\ Q_r&=-D\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dw}(r\frac{dw}{dr}) \end{aligned}\right\} \quad (2.3a.b.c)$$

先将方程(2.1a)两端同乘以rdr，然后再积分一次得：

$$Dr\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dw}{dr})-rN_r(\frac{r}{R}+\frac{dw}{dr})=F(r) \quad (2.4)$$

其中 $F(r)=\int^r qr\,dr+C$ (2.5)

应用(2.3c)，方程(2.4)成为

$$r[Q_r+N_r(\frac{r}{R}+\frac{dw}{dr})]=-F(r) \quad (2.6)$$

现在，我们需要确定F(r)。为此，用圆锥曲面沿半径为r的圆周从体中切割出如图2所示的部分壳体，考虑该部分对称轴方向的平衡，有：

$$2\pi r[Q_r cos(\frac{r}{R}+\frac{dw}{dr})+N_r\cdot sin(\frac{r}{R}+\frac{dw}{dr})]+P+\pi(r^2-b^2)q=0 \quad (2.7)$$

由于$(\frac{r}{R}+\frac{dw}{dr})$微小，上式可简化为：

$$r[Q_r+N_r(\frac{r}{R}+\frac{dw}{dr})]=-[\frac{P}{2\pi}+\frac{1}{2}q(r^2-b^2)] \quad (2.8)$$

比较(2.6)和(2.8)，可得

$$F(r)=\frac{p}{2\pi}+\frac{1}{2}q(r^2-b^2) \tag{2.9}$$

应用(2.9)式，(2.4)式可化为：

$$Dr\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dw}{dr})-rN_r(\frac{r}{R}+\frac{dw}{dr})=\frac{p}{2\pi}+\frac{1}{2}q(r^2-b^2) \tag{2.10}$$

关于相应的边界条件为：

当$r=a$时，外边缘夹紧固定：

$$W=0,\quad \frac{dw}{dr}=0,\quad u=0 \tag{2.11a.b.c}$$

当$r=b$时，内边缘被固定在可上、下移动的不变形的硬中心上：

$$\frac{dw}{dr}=0\quad u=0 \tag{2.12a.b}$$

为了简化计算，引入下列无量纲量：

$$\rho=\frac{r}{a},\ \theta=\frac{b}{a},\ y=\sqrt{12\lambda_1\lambda_2}\frac{w}{h}+\frac{1}{2}k\rho^2,\ \varphi=-\frac{dy}{d\rho} \tag{2.13}$$

$$S=\frac{a^2}{D}\rho N_r,\qquad k=\sqrt{12\lambda_1\lambda_2}\frac{a^2}{Rh}$$

$$\lambda_1=1-v,\ \lambda_2=1+v$$

令：

$$\alpha\rho=\sqrt{3\lambda_1\lambda_2}\frac{a^4}{Dh}q,\ \beta p=\frac{a^2\sqrt{12\lambda_1\lambda_2}}{Dh}\frac{p}{2\pi} \tag{2.14}$$

引入以上无量纲量，方程(2.10)、(2.1b)和边界条件(2.11)、(2.12)可以化为：

$$L(\rho\varphi)=S\varphi+[\alpha(\theta^2-\rho^2)+\beta]p \tag{2.15}$$

$$L(\rho S)=\frac{1}{2}(k^2\rho^2-\varphi^2) \tag{2.16}$$

其中：$L=\rho\frac{d}{d\rho}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}$

$$当\rho=1,\ y=\frac{1}{2}k,\ \varphi=-k,\ \frac{dS}{d\rho}-\gamma S=0 \tag{2.17a.b.c}$$

$$\rho=\theta时:\qquad \varphi=-k\theta,\ \rho\frac{dS}{d\rho}-\gamma S=0 \tag{2.18a.b}$$

这样，我们的问题便化为在边界条件（2.17），（2.18）下，求解非线性方程组(2.15)，(2.16)

2　边值问题的求解

我们用修正迭代法解边值问题(2.15)～(2.18)，在一次近似中，我们略去方程（2.15)中含S的项便得如下的线性边值问题：

$$L(\rho\varphi_1)=[\alpha(\theta^2-\rho^2)+\beta]p \tag{3.1}$$

$$L(\rho S_1)=\frac{1}{2}(k^2\rho^2-\varphi_1^2) \tag{3.2}$$

当 $\rho=1$ 时:
$$\gamma_1=\frac{1}{2}k,\quad \varphi_1=-k,\quad \frac{dS_1}{d\rho}-\gamma S_1=0 \tag{3.3a.bc}$$

当 $\rho=\theta$ 时:
$$\varphi_1=-k\theta,\quad \rho\frac{ds_1}{d\rho}-\gamma s_1=0 \tag{3.4a.b}$$

若令: $\gamma=\alpha\theta^2+\beta$, 则方程(3.1)化为:

$$L(\rho\varphi_1)=(\gamma-\alpha\rho^2)p \tag{3.5}$$

对方程(3.5)进行积分，并利用边界条件(3.3b)(3.4a)可得:

$$\varphi_1=\alpha_1 p(2\rho ln\rho-\rho)+\alpha_2 p\rho^3+\alpha_3 p\rho+\alpha_4 p\rho^{-1}-k\rho \tag{3.6}$$

其中: $\alpha_1=\frac{\gamma}{4}$, $\alpha_2=-\frac{\alpha}{8}$, $\alpha_3=\frac{1}{8}[2\gamma(2\theta^2 ln\theta-\theta^2+1)+\alpha^{c1}-\theta^4)](1-\theta^2)^{-1}$

$$\alpha_4=\frac{1}{8}[-4\gamma\theta^2 ln\theta+(1-\theta^2)(2-\alpha-\alpha\theta^2)](1-\theta^2)^{-1}$$

我们以扁球壳的无量纲内边缘挠度Wm为迭代参数:

$$W_m=\sqrt{12\lambda_1\lambda_2}\frac{W}{h}|_{r=b} \tag{3.7}$$

再应用(2.13)和(3.3a)，可得:

$$W_m=\int_\theta^1(\varphi+k\rho)d\rho \tag{3.8}$$

将(3.6)式代入上式，得: $p=\beta_0 W$ (3.9)

其中: $\beta_0^{-1}=\alpha_1(\theta^2-\theta^2 ln\theta-1)+\frac{1}{4}\alpha_2(1-\theta^4)+\frac{1}{2}\alpha_3(1-\theta^2)-\alpha_4 ln\theta$ (3.10)

将 (3.9) 式代入 (3.6) 式，可得:

$$\varphi_1=[\alpha_1\beta_0(2\rho ln\rho-\rho)+\alpha_2\beta_0\rho^3+\alpha_3\beta_0\rho+\alpha_4\beta_0\rho^{-1}]W_m-k\rho \tag{3.11}$$

将 (3.11) 代入 (3.2)，并利用边界条件(3.3c)(3.4b)可得:

$$s_1=2k\beta_0 W_m[f(\rho)+E\rho+F\rho^{-1}]+\beta_0^2W_m^2[g(\rho)+G\rho+H\rho^{-1}] \tag{3.12}$$

其中: $f(\rho)=\frac{1}{24}\alpha_2\rho^6+\frac{1}{8}(\alpha_3-\frac{5}{16}\alpha_1)\rho^4-\frac{1}{4}\alpha_4\rho^2+\frac{1}{4}\alpha_4\rho^4+\frac{1}{2}\alpha_4\rho^2)ln\rho$ (3.13)

$$g(\rho)=\frac{1}{48}\alpha_2^2\rho^8+(\frac{1}{72}\alpha_1\alpha_2-\frac{1}{12}\alpha_2\alpha_3)\rho^6+\frac{1}{8}\alpha_3^2-\frac{1}{4}\alpha_1\alpha_3+\frac{9}{16}\alpha_1^2)\rho^4+\frac{1}{2}\alpha_2\alpha_4\rho^2$$
$$+(\frac{1}{2}\alpha_1^2\rho^4+\alpha_1\alpha_4\rho^2)ln^2\rho+(\frac{1}{6}\alpha_1\alpha_2\rho^6-\frac{3}{4}\alpha_1^2\rho^4-\alpha_2\alpha_4\rho^2-\frac{1}{2}\alpha_4^2)ln\rho \tag{3.14}$$

其中: $E=[(f^1(1)-f(1)]-(f^1(\theta)-f(\theta))\theta^2](\theta^2-1)^{-1}$

$$F=[(g^1(1)-g(1)-(g^1(\theta)-g(\theta))\theta^2](\theta^2-1)^{-1}$$
$$G=[(f^1(1)-f(1)-(f^1(\theta)-f(\theta)]\theta^2](\theta^2-1)^{-1}$$

$$H=[(g^1(1)-g(1)-(g^1(\theta)-g(\theta))\theta^2](\theta^2-1)^{-1}$$

在二次近似中，我们有下述线性边值问题：

$$L(\rho\varphi_2)=s_1\varphi_1+(\gamma-\alpha\rho^2)p \tag{3.15}$$

当 $\rho=1$ 时：　$y_2=\frac{1}{2}k\varphi_2=-k$　(3.16a.b)

当 $\rho=\theta$ 时：　$\varphi_2=-k\theta$　(3.17)

对(3.15)进行积分，并利用(3.16b)，(3.17)可得：

$$\varphi_2=k^2\beta_0W_mf_1(\rho)+k\beta_0^2W_m^2f_2(\rho)+\beta_0^3W_m^3f_3(\rho)+\alpha_1p(2\rho ln\rho-\rho)+\alpha_2p\rho^3+\alpha_3p\rho$$
$$+\alpha_4p\rho^{-1}-k\rho+\frac{1}{8}A_o\rho-\frac{1}{8}A_o\rho^{-1} \tag{3.18}$$

其中：$A_o=(1-\theta^2)^{-1}\{k^2\beta_oW_m[f_1(1)-\theta f_1(\theta)]+k\beta_o^2W_m^2[f_2(1)-\theta f_2(\theta)]$
$+\beta_o^3W_m^3[f_3(1)-\theta f_3(\theta)]$

$$f_1(\rho)=-\frac{2}{63}A_1\rho^8+2(\frac{12}{1225}A_4-\frac{1}{35}A_2)\rho^6+2(\frac{8}{225}A_5-\frac{1}{15}A_3)\rho^4+\frac{E}{4}\rho^3-\frac{G}{2}\rho$$
$$+(\frac{2A_4}{35}\rho^6+\frac{2}{15}A_5\rho^4+\frac{G}{2}\rho^2)ln\rho$$

$$f_2(\rho)=\frac{1}{60}C_1\rho^{11}-\frac{B_1}{99}\rho^{10}+(\frac{2}{63}C_2-\frac{B_2}{63}-\frac{116}{3969}C_{11}+\frac{58}{3969}B_7)\rho^8+(\frac{2}{35}C_2-\frac{B_3}{35}$$
$$+\frac{338}{42875}C_9-\frac{158}{42875}B_5+\frac{12}{1225}B_8-\frac{24}{1225}C_{12})\rho^6+\frac{1}{12}C_4\rho^5+(-\frac{B_4}{15}$$
$$-\frac{196}{3375}C_1-\frac{98}{2025}B_6-\frac{16}{225}C_{13})\rho^4+(\frac{C_5}{4}-\frac{F}{4}-\frac{3}{32}B_9)\rho^3+(\frac{C_3}{3}-\frac{B_{10}}{8}-\frac{C_6}{2}$$
$$+\frac{H}{4})\rho+[(\frac{2}{9}C_{11}-\frac{1}{9}B_7)\rho^8+(\frac{2}{35}C_{12}-\frac{B_8}{35}-\frac{48}{1225}C_9+\frac{24}{1225}B_5)\rho^6+(\frac{2}{15}B_{13}$$
$$-\frac{2}{225}C_1+\frac{16}{225}B_6)\rho^4+(C_6-\frac{H}{4}-\frac{1}{4}B_{10})\rho-C_7\rho^{-1}]ln\rho+[(\frac{2}{35}C_9-\frac{B_5}{35})\rho^6$$
$$+(\frac{2}{15}C_1-\frac{B_6}{15})\rho^4-\frac{B_{10}}{4}\rho]ln^2\rho$$

$$f_3(\rho)=\frac{D_1}{143}\rho^{12}+(\frac{D_2}{99}-\frac{20}{9801}D_{17})\rho^{10}+(\frac{D_3}{63}+\frac{85}{25\times10^4}D_{13}-\frac{16}{3969}D_{18})\rho^8+(\frac{D_4}{35}$$
$$-\frac{5328}{15\times10^5}D_{11}-\frac{48}{42875}D_{14}-\frac{D_{19}}{252})\rho^6+\frac{D_5}{24}\rho^5+(\frac{D_6}{15}-\frac{1132}{50625}D_{12}+\frac{2D_{15}}{375}$$
$$-\frac{2}{225}D_{20})\rho^4+(\frac{D_7}{8}-\frac{3}{32}D_{21})\rho^3+(\frac{D_8}{3}+\frac{41}{36}D_{16}-\frac{4}{9}D_{22})\rho^2+(-\frac{D_9}{4}$$
$$+\frac{D_{23}}{4})\rho-D_{10}+(\frac{D_{11}}{35}\rho^6+\frac{D_{12}}{15}\rho^4)ln^3\rho+[\frac{D_{13}}{63}\rho^8+(-\frac{36}{1225}D_{11}+\frac{D_{14}}{35})\rho^6+($$

$$-\frac{8}{75}D_{12}+\frac{D_{15}}{15})\rho^4+\frac{D_{16}}{3}\rho^2+\frac{D_{23}}{4}\rho]ln^2\rho+[\frac{D_{17}}{99}\rho^{10}+(-\frac{32}{3969}D_{13}+\frac{D_{18}}{63})\rho^8$$

$$+(\frac{654}{42875}D_{11}-\frac{24}{1225}D_{14}-\frac{D_{19}}{42})\rho^6+(\frac{56}{1125}D_{12}+\frac{D_{20}}{15}-\frac{2}{15}D_{15})\rho^4+\frac{D_{21}}{8}\rho^3$$

$$+(-\frac{2}{3}D_{16}+\frac{D_{22}}{3})\rho^2+(\frac{D_9}{2}-\frac{D_{23}}{4})\rho]ln\rho$$

以上三式中系数 A_i，B_i，C_i，D_i 如下:

$A_1=\frac{1}{24}\alpha_2$，$A_2=\frac{1}{8}\alpha_3-\frac{5}{16}\alpha_1$，$A_3=-\frac{1}{4}\alpha_4$，$A_4=\frac{1}{4}\alpha_4$，$A_5=\frac{1}{2}\alpha_4$

$B_1=\frac{1}{48}\alpha_2^2$，$B_2=\frac{1}{72}\alpha_1\alpha_2-\frac{1}{12}\alpha_2\alpha_3$，$B_3=\frac{1}{8}\alpha_3^2-\frac{1}{4}\alpha_1\alpha_3+\frac{9}{16}\alpha_1^2$，$B_4=\frac{1}{2}\alpha_2\alpha_4$，$B_5=\frac{1}{2}\alpha_1^2$，$B_6=\alpha_1\alpha_4$，$B_7=\frac{1}{6}\alpha_1\alpha_2$，$B_8=-\frac{3}{4}\alpha_1^2$，$B_9=-\alpha_2\alpha_4$，$B_{10}=-\frac{1}{2}\alpha_4^2$

$C_1=A_1\alpha_2$，$C_2=A_1\alpha_3+A_1\alpha_1+A_2\alpha_2$，$C_3=A_1\alpha_4+A_2\alpha_1+A_2\alpha_3+A_3\alpha_2$，
$C_4=E\alpha_2$，$C_5=E\alpha_1+E\alpha_3+F\alpha_2$，$C_6=E\alpha_4+F\alpha_1+F\alpha_3$，$C_7=F\alpha_4$，$C_8=A_3\alpha_3$，$C_9=2A_1A_4$，$C_{10}=2A_5A_1$，$C_{11}=-A_1\alpha_1+A_4\alpha_2$，$C_{12}=-A_2\alpha_1-A_4\alpha_1+A_4\alpha_3+A_5\alpha_2$，$C_{13}=-A_3\alpha_1-A_5\alpha_1+A_4\alpha_4+A_5\alpha_3$，$C_{14}=A_5\alpha_3$

$D_1=B_1\alpha_2$，$D_2=-B_1\alpha_1+B_1\alpha_3+B_2\alpha_2$，$D_3=B_1\alpha_4-B_2\alpha_1+B_2\alpha_3+B_3\alpha_2$，$D_4=B_2\alpha_4-B_3\alpha_1+B_3\alpha_3+B_4\alpha_2$，$D_5=G\alpha_2$，
$D_6=B_3\alpha_4-B_4\alpha_1+B_4\alpha_3$，$D_7=-G\alpha_1+G\alpha_3+H\alpha_2$，$D_8=B_4\alpha_4$，$D_9=G\alpha_4+H\alpha_3$，$D_{10}=H\alpha_4$，$D_{11}=2B_5\alpha_1$，$D_{12}=2B_6\alpha_1$，$D_{13}=B_5\alpha_2+2B_7\alpha_1$，$D_{14}=-2B_5\alpha_1+B_5\alpha_3+B_6\alpha_2+2B_8\alpha_2$，$D_{15}=B_5\alpha_4-2B_6\alpha_3+B_6\alpha_3-2B_9\alpha_1$，$D_{16}=B_6\alpha_4+2B_{10}\alpha_1$，$D_{17}=2B_1\alpha_2+B_7\alpha_2$，$D_{18}=2B_2\alpha_1-B_7\alpha_1+B_3\alpha_3+B_8\alpha_2$，$D_{19}=2B_3\alpha_1+B_7\alpha_4-B_8\alpha_1+B_8\alpha_3+B_9\alpha_2$，$D_{20}=2B_4\alpha_1+B_8\alpha_4-B_9\alpha_1+B_9\alpha_3+B_{10}\alpha_2$，$D_{21}=G\alpha_1$，$D_{22}=B_9\alpha_4-B_{10}\alpha_1+B_{10}\alpha_3$，$D_{23}=2H\alpha_1$

将(3.18)代入(3.8)可得:

$$p=(\beta_1+\beta_2k^2)W_m+\beta_3kW_m^2+\beta_4W_m^3 \tag{3.19}$$

其中: $\beta_1=\beta_0$

$$\beta_2=\beta_0^2[F_1(1)-F_1(\theta)]+[\frac{1}{8}ln\theta+\frac{1}{16}(1-\theta^2)](1-\theta^2)^{-1}[f_1(1)-\theta f_1(\theta)]$$

$$\beta_3=\beta_0^4[F_2(1)-F_2(\theta)]+[\frac{1}{8}ln\theta+\frac{1}{16}(1-\theta^2)](1-\theta^2)^{-1}[f_2(1)-\theta f_2(\theta)]$$

$$\beta_4=\beta_0^6[F_3(1)-F_3(\theta)]+[\frac{1}{8}ln\theta+\frac{1}{16}(1-\theta^2)](1-\theta^2)^{-1}[f_3(1)-\theta f_3(\theta)]$$

$$F_1(\rho)=-\frac{2}{567}A_1\rho^9+(\frac{34}{8575}A_4-\frac{2A_2}{245})\rho^7+(\frac{2}{225}A_5-\frac{2}{75}A_3)\rho^5+\frac{E}{16}\rho^4-\frac{G}{18}\rho^3$$
$$-\frac{G}{4}\rho^2+[-\frac{2}{245}A_4\rho^7+\frac{2}{75}A_5\rho^5+\frac{G}{6}\rho^3]ln\rho$$

$$F_2(\rho)=\frac{C_1}{720}\rho^{12}-\frac{B_1}{1089}\rho^{11}+\frac{1}{9}(\frac{2}{63}C_2-\frac{B_2}{63}-\frac{214}{3969}C_{11}+\frac{107}{3969}B_7)\rho^9+\frac{1}{7}(\frac{2}{35}C_3$$
$$-\frac{B_3}{35}+\frac{678}{42875}C_{\text{[illegible]}}-\frac{328}{42875}B_5+\frac{17}{1225}B_8-\frac{24}{1225}C_{12}-\frac{2}{245}C_{11})\rho^7+\frac{C_4}{72}\rho^6+\frac{1}{5}($$
$$-\frac{B_5}{15}+\frac{238}{3375}C_1-\frac{164}{3375}B_6-\frac{16}{225}C_{13}-\frac{2}{75}B_{13})\rho^5+\frac{1}{4}(\frac{C_5}{4}-\frac{F}{4}-\frac{3}{32}B_9)\rho^9$$
$$+\frac{1}{2}(\frac{C_3}{2}-\frac{B_{10}}{8}-C_6+\frac{3}{8}H)\rho^2+[\frac{1}{9}(\frac{2}{9}C_{11}-\frac{1}{9}B_7)\rho^9+\frac{1}{7}(\frac{2}{35}C_{11}-\frac{B_8}{35}$$
$$-\frac{68}{1225}C_9+\frac{14}{1225}B_5)\rho^7+\frac{1}{5}(\frac{2}{15}B_{13}-\frac{8}{225}C_1+\frac{22}{225}B_6)\rho^5+\frac{1}{2}(C_6-H)\rho^2]ln\rho$$
$$+[\frac{1}{7}(\frac{2}{35}C_9-\frac{B_5}{35})\rho^7+\frac{1}{5}(\frac{2}{15}C_1-\frac{B_6}{15})\rho^5-\frac{1}{8}B_{10}\rho^2-\frac{C_7}{8}]ln^2\rho$$

$$F_3(\rho)=\frac{D_1}{1959}\rho^{13}+\frac{1}{11}(\frac{D_2}{1098}-\frac{29}{9801}D_{17})\rho^{11}+\frac{1}{9}(\frac{D_3}{63}+\frac{407}{25\times10^4}D_{13}-\frac{23}{3969}D_{18})\rho^9$$
$$+\text{[illegible]}-\frac{11148}{\text{[illegible]}\times10^5}D_{11}+\frac{122}{42875}D_{14}-\frac{1}{1764}D_{19})\rho^7+\frac{D_5}{144}\rho^6+\frac{1}{5}(\frac{D_6}{5}$$
$$-\frac{\text{[illegible]}}{50625}\text{[illegible]}+\frac{22}{1125}\text{[illegible]}-\frac{1}{75}D_{20})\rho^5+\frac{1}{4}(\frac{D_7}{8}-\frac{3}{32}D_{21})\rho^4+\frac{1}{3}(D_8/3\quad+\frac{155}{96}D_{16}$$
$$-\frac{5}{9}D_{22})\rho^3+\frac{1}{4}(-D_9+D_{23})\rho^2-D_{10}\rho+(\frac{D_{11}}{245}\rho^7+\frac{D_{12}}{75}\rho^5)ln^3\rho+[\frac{D_{13}}{567}\rho^9$$
$$-(\frac{51}{8575}D_{11}+\frac{D_{14}}{245})\rho^7+(\frac{-11}{375}D_{12}+\frac{D_{15}}{75})\rho^5+\frac{D_{16}}{9}\rho^3+\frac{D_{23}}{8}\rho^2]ln^2\rho$$
$$+[\frac{D_{17}}{1089}\rho^{11}+(-\frac{46}{35721}D_{13}+\frac{D_{18}}{567})\rho^9+(\frac{1164}{300125}D_{11}-\frac{34}{8575}D_{14}-\frac{D_{19}}{294})\rho^7$$
$$+(\frac{122}{5625}D_{12}-\frac{16}{1125}D_{15}+\frac{D_{20}}{75})\rho^5+(-\frac{8}{27}D_{16}+\frac{D_{22}}{9})\rho^3+\frac{1}{4}(D_9-D_{23})\rho^2]ln\rho$$

特征方程(3.19)求得后，可以很方便地求出临界点，由(3.19)式的极值条件：

$\frac{dp}{dW_m}=0$，可得：

$$W_m^*=\frac{-\beta_3k+\sqrt{\beta_3^2k^2-3\beta_4(\beta_1+\beta_2k^2)}}{3\beta_4} \tag{3.20}$$

$$W^{**}=\frac{-\beta_3k-\sqrt{\beta_3^2k^2-3\beta_4(\beta_1+\beta_2k^2)}}{3\beta_4} \tag{3.21}$$

若分别取 W_m 为 W_m^* 和 W_m^{**}，并将其代入(3.19)，就可得下临界载荷和上临界载荷。

若令：$k_0=\dfrac{3\beta_1\beta_4}{\beta_3^2-3\beta_2\beta_4}$，则由(3.20)和(3.21)可知，只有当 $k\geqslant k_0$ 时，壳体方会丧失稳定性；当 $k<k_0$ 时，壳体不会失稳。

几何参数 k_0 及临界载荷 p^* 和 p^{**} 是壳体稳定性设计中的重要参数，在这里，我们给出了显式表达式。

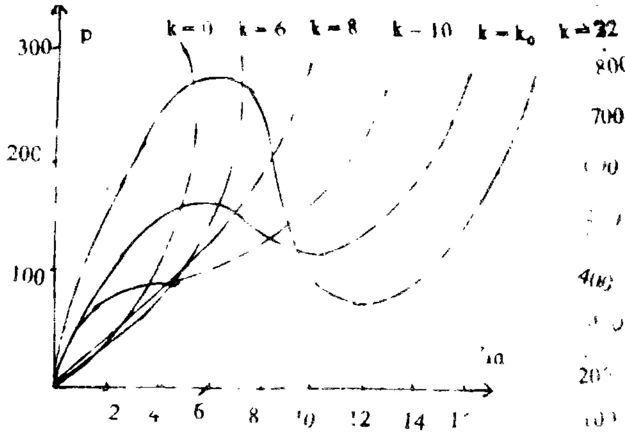

图 3

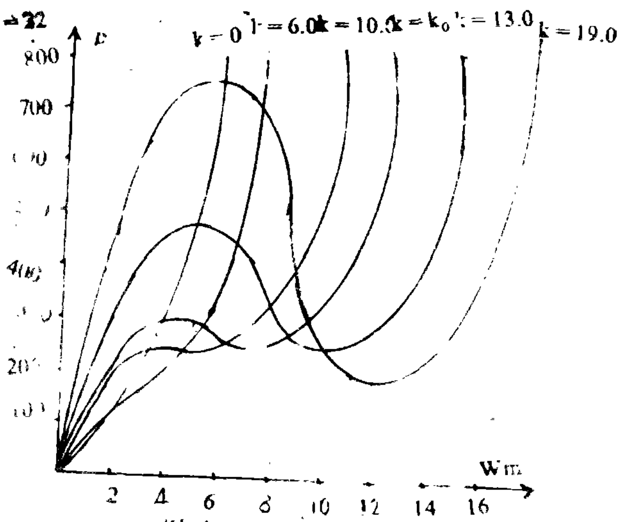

图 4

3 数值算例

我们以 $\alpha=0.0$，$\beta=1.0$，$\theta=0.2$，$\gamma=0.3$ 的情况为例，按照公式(3.19)进行数值计算，图 3 中，给出了不同的几何参数值下的特征曲线，由图看出当值很小时，$p-W_m$ 曲线单调上升，说明壳体具有平板性质，即无跳跃现象，k 值较大时，$p-W_m$ 曲线出现　形线状态，这时壳体产生跳跃现象。

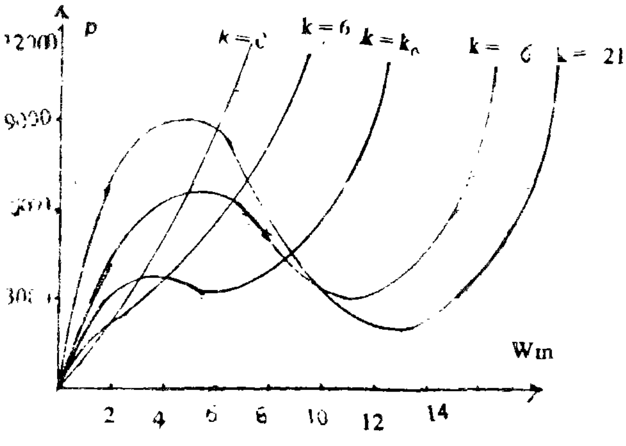

图 5

图 4 给出当 $\alpha=1.0$，$\beta=0.0$，$\theta=0.2$，$\gamma=0.3$ 时，即壳体仅受分布载荷作用时的 $p—W_m$ 特征关系曲线，比较图 3（仅受集中力）和图 4，我们发现，开顶扁球壳，受均布载荷作用时的 $p—W_m$ 关系曲线比在受集中载荷时变化更剧烈，即图 4 中的 p 对 W_m 更敏感。

在图 5 中，给出了 $\alpha=1.0$，$\beta=1.0$，$\theta=0.2$，$\gamma=0.2$ 时，即壳体同时受集中力和均布

载荷作用时的 $p-W_m$ 特征关系曲线．

图 6 给出了 $\alpha=1.0$，$\beta=1.0$，$\gamma=0.2$，时 $k_0-\theta$ 关系曲线，图 7 给出了关系曲线．

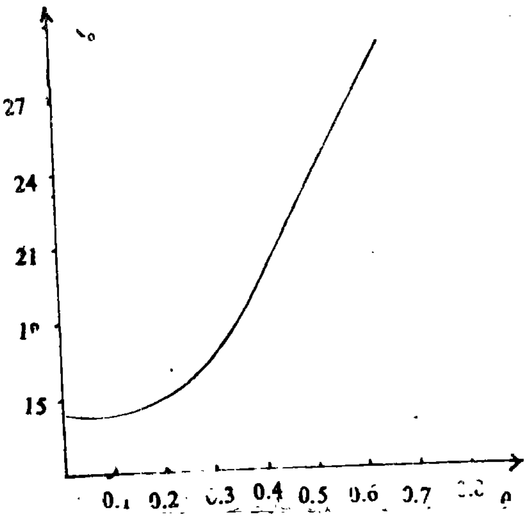

图 6

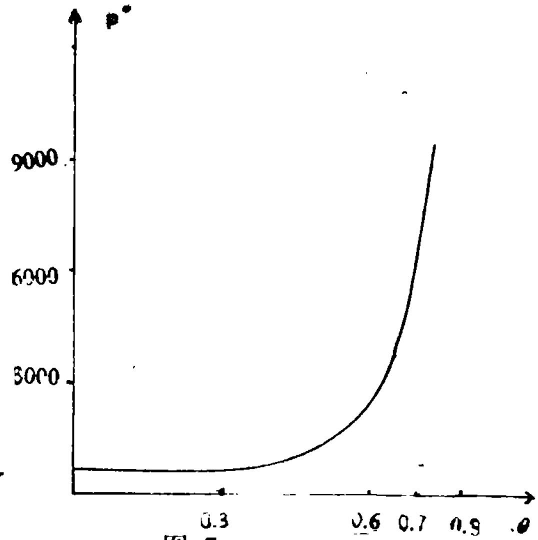

图 7

参　考　文　献

〔1〕 刘人怀，成振强．集中载荷作用下开顶扁球壳的球线性稳定性问题．应用数学和力学．1988．2.

〔2〕 刘人怀，李东．均布载荷作用下的开顶扁球壳的非线性稳定性问题．应用数学和力学．1988．3.

〔3〕 叶开源，刘平．复合载荷下圆底扁球壳的非线性稳定性．应用数学和力学．1991．1

〔4〕 钱伟长，叶开源．圆薄板的大挠度问题．物理学报．10.3(1954)．209—236

On the Nonlinear Stability of a Truncated Shallow Spherical Shell under Compound Load

Yang Guozhan　Miao Tongchen　(Zheng Zhou Institute of Techonology)

Yang Ronggen　(Henan Worker University of Architecture)

Abstract: In this paper, the axisymme tric nonlinear stability of a clamped truncated shallow spherical shell with a nondeformable rigid body at the center under compound load is investigated by use of the modified iteration method. The analytic formulas of second approximation for determining the upper and lower critical buckling loads are obtained, and the p–Wm characteristic relation can be given analytically.

Keywords: Shallow Shell, buckling, Stability