

平面六杆机构设计中几个基本问题的研究

邹昌平 黄茂林

(重庆大学机械传动国家重点实验室)

摘 要: 本文讨论了Ⅲ级六杆机构的曲柄存在准则及其使用方法; 研究了几种六杆机构的传力特性; 得出几条重要结论; 提出“可用合力臂评价Ⅳ级六杆机构传力特性”的理论。

关键词: 平面六杆机构, 曲柄存在准则, 合力臂, 传力特性

中国分类号: TH112

1 Stephenson 型六杆机构曲柄铰链中心到边杆铰链中心距离的极值问题

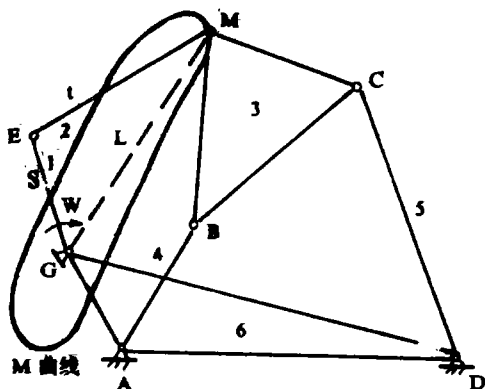


图 1

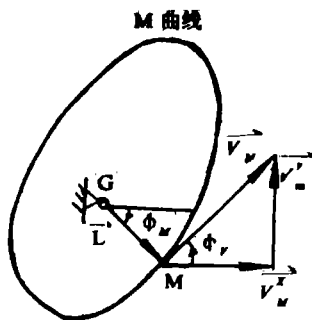


图 2

1.1 曲柄存在与 L 的极值

四杆以上多杆机构的曲柄存在与否的判断常常相当困难, 对此已有不少讨论。

例如图 1 所示的Ⅲ级六杆机构, 众所周知, 其曲柄存在的条件为:

$$\begin{cases} s + t \geq L_{\max} \\ |s - t| \geq L_{\min} \end{cases} \quad (1)$$

式(1)中, L_{\min} 、 L_{\max} 分别为曲柄铰链中心 G 到基础四杆机构 ABCD 的连杆铰链中心 M 的最近与最远距离。当该六杆机构中的 M 点的轨迹为一封闭的连杆曲线时, 显然可以将 L 视为一可变长度杆, 若要 GE 成为曲柄, 则可变向量 L 也必须能相对于 G 点作整周旋转。这就得到了存在曲柄的一个基本条件: G 点必须处于 M 点的封闭轨迹之内。

收稿日期: 1993-03-06

因此,在机构各尺寸参数已知后,要判断是否存在曲柄则必须:

①计算 M 点的轨迹,检查 G 点是否处于封闭轨迹内;

②计算出 L_{\max} 及 L_{\min} , 检查杆长 s, t 是否满足 (1) 式。

而极值的计算是一个关键的问题,也是一个较为困难的问题。

1.2L 取极值的运动学含义与运动几何学条件

由图 1 可知, $L = GM$, 利用两点间距离公式得:

$$L = \sqrt{(X_M - X_G)^2 + (Y_M - Y_G)^2} \quad (2)$$

在式(2)中, $X_M = f_1(\phi)$, $Y_M = f_2(\phi)$, $L = f(\phi)$, X_G 和 Y_G 都是与 ϕ 无关的定数。

将(2)式两边平方再对 ϕ 求导,得:

$$L \cdot L' = X'_M(X_M - X_G) + Y'_M(Y_M - Y_G) \quad (3)$$

令(3)式中的 $L' = 0$, 可得 L 取极值(L_{\min} 和 L_{\max})的条件方程是:

$$X'_M(X_M - X_G) + Y'_M(Y_M - Y_G) = 0 \quad (4)$$

下面就来详细分析(4)式。

1.2.1 L 取极值的运动学含义

将 (4) 式变形为:

$$(Y_M - Y_G) / (X_M - X_G) = -X'_M / Y'_M \quad (5)$$

考虑到有以下关系式:

$$\begin{cases} X'_M = dX_M / d\phi = (dX_M / dt) \cdot (dt / d\phi) = (dX_M / dt) / (d\phi / dt) = V_M^x / \dot{\phi} \\ Y'_M = V_M^y / \dot{\phi} \end{cases}$$

则(5)式可变为:

$$(Y_M - Y_G) / (X_M - X_G) = -V_M^x / V_M^y \quad (6)$$

为便于分析,将(6)式变形为:

$$[(Y_M - Y_G) / (X_M - X_G)] \cdot (V_M^y / V_M^x) = -1 \quad (7)$$

参看图1和图2可得:

$$\begin{cases} \lg\phi_M = (Y_M - Y_G) / (X_M - X_G) \\ \lg\phi_V = V_M^y / V_M^x \end{cases} \quad (8)$$

比较 (7)、(8) 两式可得:

$$\lg\phi_M \cdot \lg\phi_V = -1 \quad (9)$$

(9)式表明:当 L 取极值时,有 $L \perp V_M$ 或 $GM \perp V_M$ 成立.可见其运动学含义是:

①、当 L 取极值时, L 与该瞬时的速度 V_M (沿 M 曲线在 M 点的切线方向)垂直, L 与 M 曲线在 M 点处的法线方向一致。

②在图 1 中,当六杆机构的 1-2 杆组的长度 s, t 使 (1) 式取“=”号成立, 则当 L 取极值时, 1-2 杆重合于 GEM 线。若杆 2 是二力杆, 则杆 2 两端点 E, M 的作用力 F_E, F_M 的方向重合于 GEM 线;而 $V_E \perp GEM$, 故有 $F_E \perp V_E$ 。

当图1中的六杆机构,不是以杆1为主动杆,而是以4或5作主动杆,则当L取极值时,在从动杆1的端点E处,有 $F_E \perp V_E$, $\alpha = 90^\circ$, $\gamma = 0$,新的六杆机构出现死点。

1.2.2 L取极值的运动几何学条件

参见图1,连杆3作平面运动,其绝对速度瞬心P为过M、B、C并分别与 V_M 、 V_B 、 V_C 垂直的三直线的汇交点。而杆4和5均作定轴转动,有 $V_B \perp AB$, $V_C \perp DC$,则AB、-DC的延长线必相交于点P。由1.1知,当L取极值时,有 $GM \perp V_M$,则GM的延长线必过P。如图3所示。

由以上分析可知,L取极值的运动几何学条件是:

GM、AB、DC三直线汇交于连杆3的绝对速度瞬心。

1.3 Lmin与Lmax的求取

这里介绍三种方法。

1.3.1 解超越方程

由(4)式可知,L取极值时,有条件方程 $F(\phi) = 0$ 。这里先来推导 $F(\phi)$ 的表达式。

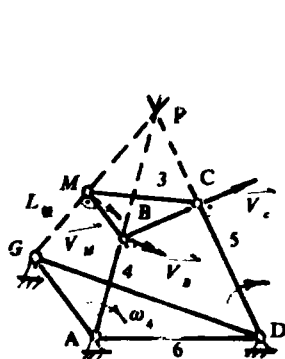


图3

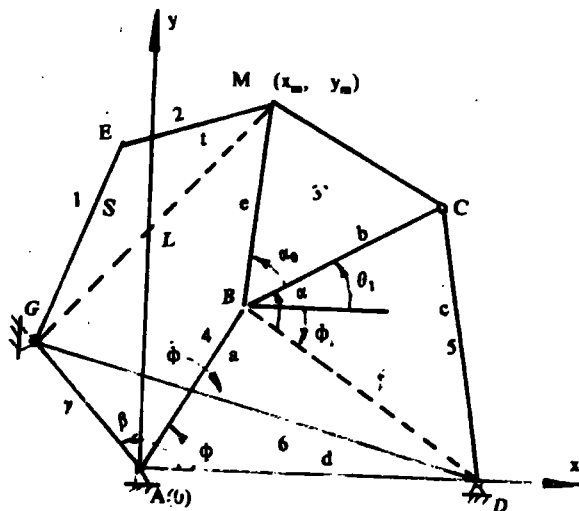


图4

如图4所示,建立坐标系XOY,原点O与A重合。

解 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BDC$ 可得:

$$\begin{cases} f_1^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\phi \\ \phi_1 = \arcsin[asin\phi / (acos\phi - d)] \\ \alpha = \cos^{-1}[(b^2 + f_1^2 - c^2) / (2bf_1)] \\ \theta_1 = \alpha + \phi_1 \end{cases} \quad (10)$$

M和B同是连杆3上的点,可得:

$$\begin{cases} X_M = acos\phi + ecos(\alpha_0 + \theta_1) \\ Y_M = asin\phi + esin(\alpha_0 + \theta_1) \end{cases} \quad (11)$$

(11)式对 ϕ 求导得:

$$\begin{cases} X'_M = -a\sin\phi - e\sin(\alpha_0 + \theta_1) \cdot \dot{\theta}_1 \\ Y'_M = a\cos\phi + e\cos(\alpha_0 + \theta_1) \cdot \dot{\theta}_1 \end{cases} \quad (12)$$

由图4可得:

$$\begin{cases} X_G = r\cos\beta \\ y_G = r\sin\beta \end{cases} \quad (13)$$

将 (11)、(12)、(13) 三式代入 (4) 式, 经整理得:

$$a[e\sin(\alpha_0 - \phi + \theta_1) - r\sin(\beta - \phi)] + e[a\sin(\phi - \alpha_0 - \theta_1) - r\sin(\beta - \alpha_0 - \theta_1)]\dot{\theta} = 0 \quad (14)$$

由(10)式可知:

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\alpha} + \dot{\phi}_1 \quad (15)$$

由(10)式可得:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = [-adsin\phi(a^2 - b^2 + c^2 + d^2 - 2adcos\phi)] / [(a^2 + d^2 - 2adcos\phi) \cdot \\ \sqrt{(a^2 + d^2 - 2adcos\phi)(-a^2 + 2b^2 + 2c^2 - d^2 + 2adcos\phi) - (b^2 - c^2)^2}] \\ \dot{\phi}_1 = a(a - dcos\phi) / (a^2 + b^2 - 2adcos\phi) \end{cases} \quad (16)$$

把(16)式代入(15)式可得:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = f_3(\phi) / f_4(\phi) \\ f_3(\phi) = a(a - dcos\phi)\sqrt{a^2 + b^2 - 2adcos\phi}(-a^2 + 2b^2 + 2c^2 - d^2 + 2adcos\phi) - (b^2 - c^2)^2 \\ \quad - adsin\phi(a^2 - b^2 + c^2 + d^2 - 2adcos\phi) \\ f_4(\phi) = (a^2 + b^2 - 2adcos\phi) \\ \quad \sqrt{(a^2 + d^2 - 2adcos\phi)(-a^2 + 2b^2 + 2c^2 - d^2 + 2adcos\phi) - (b^2 - c^2)^2} \end{cases} \quad (17)$$

把(17)式代入(14)式并考虑到 $f(\phi) \neq 0$ (因 θ 不能趋近于 ∞),可得:

$$af_4(\phi)[e\sin(\alpha_0 - \phi + \theta_1) - r\sin(\beta - \phi)] + ef_3(\phi)[a\sin(\phi - \alpha_0 - \theta_1) - r\sin(\beta - \alpha_0 - \theta_1)] = 0 \quad (18)$$

考虑到(10)、(17)两式, 则 (18) 式等价于下式:

$$F(\phi) = 0 \quad (19)$$

式中:

$$\begin{cases}
 F(\phi) = f_5(\phi) + f_6(\phi) \\
 f_5(\phi) = af_4(\phi)\{e\sin[\alpha_0 - \phi + f_1(\phi)] - r\sin(\beta - \phi)\} \\
 f_6(\phi) = ef_3(\phi)\{a\sin[\phi - \alpha_0 - f_1(\phi)] - r\sin(\beta - \alpha_0 - f_1(\phi))\} \\
 f_4(\phi) = (a^2 - d^2 - 2ad\cos\phi)\sqrt{(a^2 + d^2 - 2ad\cos\phi)(-a^2 + 2b^2 + 2c^2 - d^2 + 2ad\cos\phi) - (b^2 - c^2)^2} \\
 f_3(\phi) = a(a - b\cos\phi)\sqrt{(a^2 + d^2 - 2ad\cos\phi)(-a^2 + 2b^2 + 2c^2 - d^2 + 2ad\cos\phi) - (b^2 - c^2)^2} \\
 \quad - adsin\phi(a^2 - b^2 + c^2 + d^2 - 2ad\cos\phi)
 \end{cases} \quad (20)$$

可见, (18) 式为 ϕ 的超越方程, 可采用迭代等方法求解, 求得满足该式的 ϕ 后, 代入 (10) 式可求 θ_1 ; 再代入 (11) 式, 可求得 X_M 、 Y_M 最后由 (2) 式可求得 L_{\max} 、 L_{\min} 及其出现的位置 ϕ_{\max} 、 ϕ_{\min} 。

1.3.2 运用 L 取极值的几何条件

由 1.2.2 知, 当 L 取极值时, GM、AB、DC 三直线汇交 (如图 3 所示), 根据“三直线汇交的条件是其一般式方程的系数行列式的值等于零”可得如下近似计算方法。

参照图 D, 估计相应于 L_{\min} 和 L_{\max} 的 ϕ_{\min} 和 ϕ_{\max} 出现的区间 $[\phi_a, \phi_b]$ 和 $[\phi_c, \phi_d]$ (它们都是 $[0, 2\pi]$ 的子区间), 在每一区间内, 取适当的步长 $\Delta\phi$, 调用现成的机构运动分析子程序, 算出与 ϕ 对应的 M、B、C 的 x、y 坐标, 并算出此时的 GM、AB、DC 三直线的一般式方程 $A_iX + B_iY + C_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) 的三对系数及其行列式

$$Det = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

的值, 并同时与 ε (ε 为一很小的正数, 它的大小标志三线接近汇交的程度, 可取 $\varepsilon = 0.1E-4$) 比较, 当 $|Det| < \varepsilon$ 时, 就终止运算, 此时的 ϕ_1 、 ϕ_2 即为 ϕ_{\min} 和 ϕ_{\max} 的近似值, 再调用机构运动分析子程序, 可求得 L_{\min} 和 L_{\max} 的近似值。

1.3.3 直接计算并比较

参见图 4, 在 $[0, 2\pi]$ 内, 取适当的步长 $\Delta\phi$, 逐点算出与 ϕ 对应的 L 值并相互比较, 最后可得到 L_{\min} 和 L_{\max} 的近似值。显然, 采用这种方法所得数据的精度取决于 $\Delta\phi$, $\Delta\phi$ 越小, 结果越准确。

[例子] 参照图 4, 给定的参数为:

$$a = 15.0, b = 22.0, c = 30.0, d = 35.0, e = 20.0, r = 19.0, \alpha = 45^\circ, \beta = 95^\circ$$

试求 L_{\min} 、 L_{\max} 及 ϕ_{\min} 、 ϕ_{\max} 。

解: 采用方法 1, 编制程序, 解超越方程, 最后结果为:

$$\phi_{\min} = 169.3900^\circ, \quad \phi_{\max} = 292.0062^\circ; \quad L_{\min} \approx .3761340E+01, L_{\max} \approx .1951237E+02$$

以上结果得到如图 5 所示的机构模型的验证, 说明方法 1 是正确的也是可行的。同时, 取 $s = 12.0$, $t = 14.0$, s 、 t 满足 (1) 式, 通过模拟, 证实了 GE 杆是曲柄, 从而说明

了(1)式的正确性。

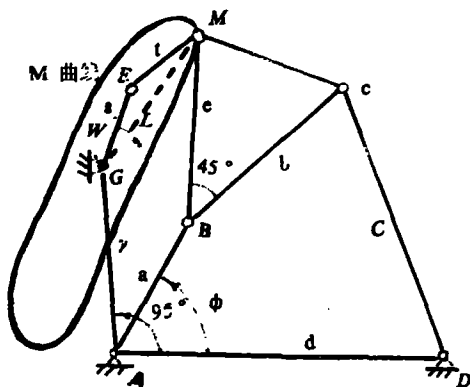


图5

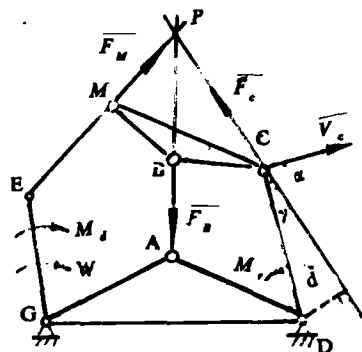


图6

由(1)和1.2.1知, L_{min} 和 L_{max} 不仅对判断曲柄存在与否十分有用, 而且对机构传机特性(包括死点)分析也很有用。下面就接着分析Ⅲ-Ⅳ级六杆机构的传力特性。

2 Ⅲ-Ⅳ级六杆机构传力特性分析

这里分析了三种机构的传动角和死点, 并提出“合力臂”这一新指标。

2.1 传动角

与四杆机构一样, 六杆机构的传动角是从动杆作力点的受力方向与速度方向所夹锐角(称为压力角 α) 的余角, 用 γ 表示, $\gamma = 90^\circ - \alpha$ 。

当 $\gamma = 90^\circ$ 时, 机构的传力特性最佳; 当 $\gamma = 0$ 时, 传力特性最差, 此时的机构位置称为“死点”(死点将在(2.3)单独讨论); $0 < \gamma < 90^\circ$, γ 越大, 传力特性越好。

下面就来讨论三种常见六杆机构的传动角。

2.1.1 Ⅲ级六杆机构(1)

如图6所示, 取GE为主杆, 是Ⅲ级机构, 这里研究从动杆DC(从动杆AB的情况类似, 从略)。构件MBC受三力 F_M 、 F_B 、 F_C 而平衡, 而EM、AB均为二力杆, F_M 和 F_B 方向已知, 则由“三力汇交于一点P”可确定 F_C 的方向, 从而可确定 α 、 γ 如图6所示。当GM取极值时, 可能出现 γ_{min} 。

2.1.2 Ⅲ级六杆机构(2)

如图7所示, 取ABC为主动杆, 是Ⅲ级机构。构件DEF受三力 F_D 、 F_E 、 F_F 而平衡, 而CD、BE都是二力杆, F_D 和 F_E 的方向已知, 由“三力汇交于点P”可确定 F_F 的方向, 从而可确定 α 、 γ 如图7所示。

2.1.3 Ⅳ级六杆机构

如图8所示, 取GF为主动杆, 是Ⅳ级机构。构件DEF受三力 F_D 、 F_E 、 F_F 而平衡, 而CD、BE都是二力杆, F_D 和 F_E 的方向已知, 由“三力汇交于点P”可确定 F_F 的方向。根据“作用力和反作用力的关系”, 可确定从动件ABC在C、B处所受力 F_{DC} 、 F_{EB} 的方向, 由此可确定C、B处的 α 、 γ 如图8所示, 分别用 (α_2, γ_2) 和 (α_1, γ_1) 表示。

γ_1 、 γ_2 将综合标志该IV级机构的传力特性。

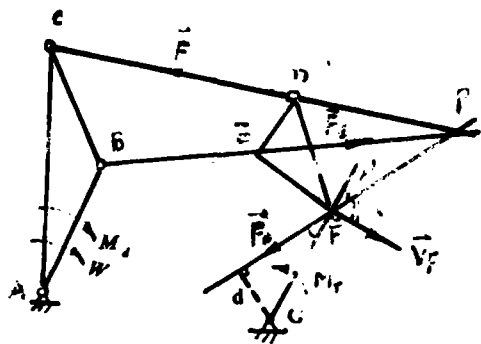


图7

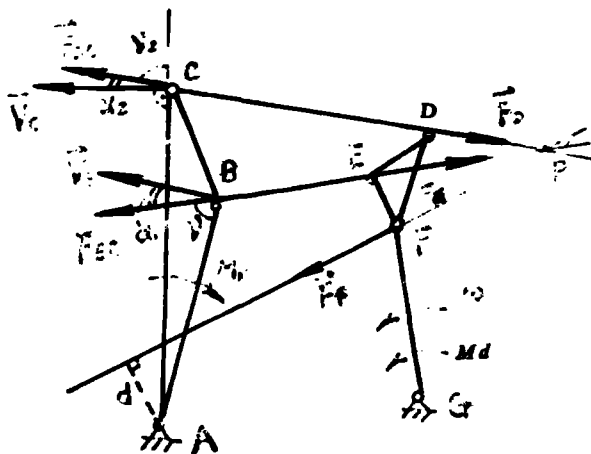


图8

2.2 合力臂

由以上分析可知, IV级六杆机构的传力特性评定指标并不具体, 需要寻求新的合适的评定指标。为此, 通过进一步分析, 我们提出“合力臂”这一新指标, 其含义和作用如下所述。

由图8可知, F_F 实为 F_{DC} 、 F_{EB} 的合力, 它对转动中心 A 的力臂为 d , d 就是“合力臂”。 d 越大, 合力矩也越大, 机构的传力特性肯定越好; 反之, d 越小, 机构的传力特性必定越差。可见, 用合力臂 d 能很好地衡量 IV 级六杆机构的传力特性。 $d=0$ 时, 机构出现死点。

其实, 对于图6和图7中的 III 级六杆机构, 同样可用合力臂 d 评定其传力特性, $d \propto \sin \gamma$; 当 $\gamma=0$ 时, $d=0$, 机构出现死点。

在此, 我们提出“用合力臂作为衡量 III-IV 级六杆机构传力特性的质量指标”的理论, 其中的“合力臂”含义是“从动杆的固定铰链中心到从动杆其余点所受外力的合力作用线的距离”。

2.3 死点

死点就是从动杆出现 $\gamma=0$ 的机构位置。下面就来具体分析如图6~8所示的三类机构的死点。

①对于图6所示机构, 当 GE、EM 共线时, GM 取极值, GM、AB、DC 三线汇交于构件 MBC 的绝对速度瞬心 P, $\gamma=0$, $d=0$, 出现死点。

②对于图7所示机构, 当 F 的作用线通过 G 点时, $\gamma=0$, $d=0$, 出现死点。

③对于图8所示机构, 当 CD、BE、AF 三线汇交于构件 DEF 的相对于构件 ABC 的速度瞬心 P 时, 合力 F_F 的作用线将通过点 A, $d=0$, 出现死点。

3 小结

3.1 本文以 Stephenson 型六杆机构为对象, 抓住运用其曲柄存在准则的关键——曲柄铰链中心到连杆铰链中心距离 L 的极值的求取, 在详细介绍 L 极值的求解方法之前, 特别研究了 L 极值的运动学含义与运动几何学条件, 并从中得出几条重要结论, 这不仅有益于本文后叙的六杆机构的传力特性分析, 而且把 L_{\min} 、 L_{\max} 与 γ_{\min} 、机构死点联系在一起;

3.2 基于四杆机构的传力特性分析方法和“平面构件受三力必汇交于一点”这一理论, 讨论了几种六杆机构的传动角; 鉴于 IV 级六杆机构的复杂性和特殊性, 对其作了深入分析, 特提出“合力臂”这一新指标, 它可用来综合评价该种机构的传力特性, 也适用于其它六杆机构。

参 考 文 献

- [1] [德]·伏尔默等著, 石则昌等译, 《连杆机构》, 机械工业出版社, 1989 年。
- [2] [日]小川洁著, 黄茂林译, 《六杆机构分析》, 重庆大学机一系, 1982 年。
- [3] 杨基厚、王成云, “一种 Stephenson 型六杆机构的传动角及其从动件的运动规律”, 《机械设计与研究》, 1989 年第 3 期。

Studies of Several Basic Questions Involved in Designing the Plane Six-Bar Linkages

Zou Changping Huang Maolin

(the State Key Laboratory of Mechanical Transmission)

Abstract: This paper discusses the criterion of being crank of grade III six-bar linkage and its operation method, studies the force-transfer characteristics of a few six-bar linkages; obtains several pieces of important conclusions; raises such a theory as “The arm of resultant forces can be used to evaluate the force-transfer characteristic of grade IV six-bar linkage”.

keywords: plane six-bar linkage, the criterion of being crank, the arm of resultant forces, the force-transfer characteristic.