第14卷 第1期 郑州工学院学报 Vol.14 No.1
1993年 3 月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Mar. 1993

新型组合恒等式*

刘人杰

(郑州工学院)

摘　要：本文获得若干新型组合恒等式。

关键词：组合数，二项式定理，高阶等差级数。

中国图书分类号：O122

由于组合等式被广泛应用到各学科的具体计算中，至今，组合等式的发掘与证明方法的探讨，仍是一项颇有意义的科研课题。1989 年，湘潭大学唐佑华教授，对于 $a_k = a_{n-k}(k=0, 1, 2, \cdots n)$ 为任意实数或复数的二元 n 次齐次对称多项式 $\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} y^k$ 建立了恒等式[1]

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k E_n^k (x+y)^{n-2k} (xy)^k$$

其中 $a_0, a_1, a_2, \cdots a_n$ 为符合条件 $a_k = a_{n-k}(k=0, 1, 2, \cdots n,)$ 的任意实数或复数

$$E_n^k = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \begin{bmatrix} n-2s \\ k-s \end{bmatrix} a_s, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} \qquad (0 \leqslant k \leqslant [n/2])$$

上述结论是二项式定理的一个重要推广，它的一个重要的特殊情况是

$$\sum_{k=0}^{n} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n-k}{k} (x+y)^{n-2k} (xy)^k \qquad (A\text{式})$$

本文对此特殊情况进一步进行探讨，获得若干新型组合恒等式，试分析上述齐次对称多项式右项、关于 $\binom{n-k}{k}$ 的组合意义，由于 $N_{n-1} = \{1, 2, 3, \cdots n-1\}$ 的恰含 k 个不相邻元的子集的个数即 $\binom{n-k}{k}$[2] 因此它必为非负整数，这是应该首先指出的。有关新型组合恒等式现讨论如下：

* 收稿日期：1991-10-20

1　基本关系式

$$\binom{n-k}{k}=\frac{(n-k)!}{k!\ (n-2k)!}$$

由此可直接验证推出

$$\binom{n-k}{k}=\binom{n-k}{n-2k}\quad 及\binom{n-k}{k}=\frac{n-k}{k}\binom{n-k-1}{k} \tag{1}$$

2　加法公式

$$\binom{n-k}{k}=\binom{n-k-1}{k}+\binom{n-k-1}{k-1} \tag{2}$$

$$\binom{n-k}{k}=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\begin{bmatrix}n-2r\\k-r\end{bmatrix} \tag{3}$$

证: 公式 (2) 亦可通过直接代入验证之, 下面只证明公式 (3), 事实上由

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=\binom{n-k}{k}+\binom{n-k-1}{k-1}$$[1]可知

$$\begin{bmatrix}n-2k\\r-k\end{bmatrix}=\binom{n-r-k}{r-k}+\binom{n-r-k-1}{r}$$

于它的两端同乘以$(-1)^k$后, 再令$k=0$, 1, 2, $\cdots r$ 即可得到下面$r+1$个等式:

$$\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}=\binom{n-r}{r}+\binom{n-r-1}{r-1}-\begin{bmatrix}n-2\\r-1\end{bmatrix}=-\binom{n-r-1}{r-1}-\binom{n-r-2}{r-2}$$

$$\begin{bmatrix}n-4\\r-2\end{bmatrix}=\binom{n-r-2}{r-2}+\binom{n-r-3}{r-3}$$

……………………………………

$$(-1)^r\begin{bmatrix}n-2r\\0\end{bmatrix}=(-1)^r\binom{n-2r}{0}+(-1)^r\binom{n-2r-1}{-1}$$

将上面的等式相加即得

$$\binom{n-r}{r}+(-1)^r\binom{n-2r-1}{-1}=\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}-\binom{n-2}{r-1}+\binom{n-4}{r-2}-\cdots$$

$$+(-1)^r\begin{bmatrix} n-2r \\ 0 \end{bmatrix}$$

由于要从 n 件里取出负件来是不可能的，于是上式左端的第二项应为零，由此公式(3)获证。

3 各项系数之和

在 A 式中令 $x+y=1$，$xy=1$ 即 $x=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$，$y=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ 得

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\binom{n-k}{k}=\sum_{k=0}^{n}(\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^{n-k}(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})^k=\sum_{k=0}^{n}(cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3})^{n-k}(cos\frac{\pi}{3}$$

$$-isin\frac{\pi}{3})^k=\sum_{k=0}^{n}e^{i\frac{n-2k}{3}\pi}$$

右端显然是以 $q=e^{-i\frac{2}{3}\pi}$ 为公比的 $n+1$ 项等比级数，据此，

$$\sum_{k=0}^{n}e^{i\frac{n-2k}{3}\pi}=\frac{2}{\sqrt{3}}sin\frac{n+1}{3}\pi \tag{4}$$

4 系数绝对值之和

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n-k}{k}=\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}) \tag{5}$$

公式(5)只须将 A 式写成

$$x^{n+1}-y^{n+1}=(x-y)\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\binom{n-k}{k}(x+y)^{n-2k}(xy)^k$$

再令 $x+y=1$，$xy=1$ 即 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 便可验证。

另外由(4)与(5)相加可得 $\frac{2}{\sqrt{3}}sin\frac{n+1}{3}\pi+\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]$

$$
=\begin{cases}
2\binom{n-0}{0}+\binom{n-2}{2}+\binom{n-4}{4}+\cdots+\binom{n-\frac{n}{2}+1}{[\frac{n}{2}]} & n=4k\text{为双偶数}\\
2\binom{n-0}{0}+\binom{n-2}{2}+\binom{n-4}{4}+\cdots+\binom{n-\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}-1} & n=2k\text{为单偶数}\\
2\begin{bmatrix}n-0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n-2\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n-4\\4\end{bmatrix}+\cdots+\binom{n-[\frac{n}{2}]}{[\frac{n}{2}]} & n\text{为奇数且}[\frac{n}{2}]\text{为偶数}\\
2\binom{n-0}{0}+\binom{n-2}{2}+\binom{n-4}{4}+\cdots+\binom{n-[\frac{n}{2}]+1}{[\frac{n}{2}]-1} & n\text{为奇数且}[\frac{n}{2}]\text{为奇数}
\end{cases}
$$

由(4)与(5)相减可得

$$
\frac{2}{\sqrt{3}}sin\frac{n+1}{3}\pi-\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]
$$

$$
=\begin{cases}
2\binom{n-1}{1}+\binom{n-3}{3}+\binom{n-5}{5}+\cdots+\binom{n-\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}-1} & n=4k\text{为双偶数}\\
2\binom{n-1}{1}+\binom{n-3}{3}+\binom{n-5}{5}+\cdots+\binom{n-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} & n=2k\text{为单偶数}\\
2\binom{n-1}{1}+\binom{n-3}{3}+\binom{n-5}{5}+\cdots+\binom{n-[\frac{n}{2}]+1}{[\frac{n}{2}]-1} & n\text{奇且}[\frac{n}{2}]\text{偶}\\
2\binom{n-1}{1}+\binom{n-3}{3}+\binom{n-5}{5}+\cdots+\binom{n-[\frac{n}{2}]}{[\frac{n}{2}]} & n\text{奇且}[\frac{n}{2}]\text{奇}
\end{cases}
$$

5 分解式

反复应用公式(2)并归纳之可得

$$\binom{n-k}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n-k-(i+1)}{k-i} \tag{6}$$

$$\binom{n-k}{k}=\sum_{j=1}^{n-2k+1}\binom{n-k-(i+1)}{k-1} \tag{7}$$

6 四组和式:

第一组　　在 A 式中令 x = y = 1 即可得到

$$2^{n}-2^{n-2}\binom{n-1}{1}+2^{n-4}\binom{n-2}{2}-\cdots+(-1)^{[\frac{n}{2}]}2^{n-2[\frac{n}{2}]}\binom{n-[\frac{n}{2}]}{[\frac{n}{2}]}=n+1 \tag{8}$$

在 A 式中令 $y=1$ 得

$$\sum_{k=0}^{n}x^{k}=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^{k}\binom{n-k}{k}(1+x)^{n-2k}x^{k}$$

展开右端每一个括号$(1+x)^{n-2k}$后再比较两端x^{k}的系数即得

$$\binom{n}{k}-\binom{n-1}{1}\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{k-2}-\cdots+(-1)^{k}\binom{n-k}{k}=1 \tag{9}$$

将基本关系式(1)写成

$$k\binom{n-k}{k}=(n-k)\binom{n-k-1}{k-1}\qquad (k=1,2,\cdots[\frac{n}{2}])$$ 即得

$$\binom{n-1}{1}+2\binom{n-2}{2}+3\binom{n-3}{3}+\cdots+\frac{n-1}{2}\binom{n-\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}}=(n-1)\binom{n-2}{0}$$

$$+(n-2)\binom{n-3}{1}+(n-3)\binom{n-4}{2}+\cdots+\frac{n+1}{2}\binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-3}{2}}\qquad n\text{为奇数} \tag{10}$$

$$\binom{n-1}{1}+2\binom{n-2}{2}+3\binom{n-3}{3}+\cdots+\frac{n}{2}\binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}=(n-1)\begin{bmatrix} n-2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+(n-2)\binom{n-3}{1}+(n-3)\binom{n-4}{2}+\cdots+\frac{n}{2}\binom{\frac{n}{2}-1}{\frac{n}{2}-1}\qquad n\text{为偶数}\tag{11}$$

$$\binom{n-1}{1}-2\binom{n-2}{2}+3\binom{n-3}{3}+\cdots+(-1)^{\frac{n-1}{2}+1}\frac{n-1}{2}\binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n-1}{2}}$$

$$=(n-1)\binom{n-2}{0}-(n-2)\binom{n-3}{1}+(n-3)\binom{n-4}{2}-\cdots$$

$$+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{n+1}{2}\binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-3}{2}}\qquad n\text{为奇数}\tag{12}$$

$$\binom{n-1}{1}-2\binom{n-2}{2}+3\begin{bmatrix} n-3 \\ 3 \end{bmatrix}-\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}+1}\cdot\frac{n}{2}\binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}=(n-1)\binom{n-2}{0}$$

$$-(n-2)\binom{n-3}{1}+(n-3)\binom{n-4}{2}-\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}+1}\cdot\frac{n}{2}\binom{\frac{n}{2}-1}{\frac{n}{2}-1}$$

$$n\text{为偶数}\tag{13}$$

将基本关系式(1)写成

$$\frac{1}{n-k}\binom{n-k}{k}=\frac{1}{k}\binom{n-k-1}{k-1}\qquad \left(k=1,\ 2,\ \cdots\left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

即得

$$\frac{1}{n-1}\binom{n-1}{1}+\frac{1}{n-2}\binom{n-2}{2}+\frac{1}{n-3}\binom{n-3}{3}+\cdots+\frac{2}{n+1}\binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n+1}{2}}$$

$$=\binom{n-2}{0}+\frac{1}{2}\binom{n-3}{1}+\frac{1}{3}\binom{n-4}{3}+\cdots+\frac{2}{n-1}\binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-3}{2}} \quad n\text{为奇数} \tag{14}$$

$$\frac{1}{n-1}\binom{n-1}{1}+\frac{1}{n-2}\binom{n-2}{2}+\frac{1}{n-3}\binom{n-3}{3}+\cdots+\frac{2}{n}\binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}=\binom{n-2}{0}$$

$$+\frac{1}{2}\binom{n-3}{1}+\frac{1}{3}\binom{n-4}{3}+\cdots+\frac{2}{n}\binom{\frac{n}{2}-1}{\frac{n}{2}-1} \quad n\text{为偶数} \tag{15}$$

$$\frac{1}{n-1}\binom{n-1}{1}+\frac{1}{n-2}\binom{n-2}{2}+\frac{1}{n-3}\binom{n-3}{3}+\cdots+(-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{2}{n+1}\binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n-1}{2}}$$

$$=\binom{n-2}{0}-\frac{1}{2}\binom{n-3}{1}+\frac{1}{3}\binom{n-4}{3}-\cdots+(-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{2}{n-1}\binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-3}{2}} \quad n\text{为奇数} \tag{16}$$

$$\frac{1}{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{n-2}\begin{bmatrix}n-2\\2\end{bmatrix}+\frac{1}{n-3}\begin{bmatrix}n-3\\3\end{bmatrix}-\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}+1}\frac{2}{n}\binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}=\binom{n-2}{0}$$

$$-\frac{1}{2}\binom{n-3}{1}+\frac{1}{3}\binom{n-4}{3}-\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}+1}\frac{2}{n}\binom{\frac{n}{2}-1}{\frac{n}{2}-1} \quad n\text{为偶数} \tag{17}$$

第二组　　按高价等差级数求和公式[3]即得

$$\binom{2-1}{1}+\binom{3-1}{1}+\binom{4-1}{1}+\cdots+\binom{n}{1}=\frac{1}{2}n(n+1) \tag{18}$$

$$\binom{4-2}{2}+\binom{5-2}{2}+\binom{6-2}{2}+\cdots+\binom{n+1}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \tag{19}$$

$$\binom{6-3}{3}+\binom{7-3}{3}+\binom{8-3}{3}+\cdots+\binom{n-2}{3}=\binom{n}{1}+3\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\binom{n}{4} \tag{20}$$

$$\binom{8-4}{4}+\binom{9-4}{4}+\binom{10-4}{4}+\cdots+\binom{n+3}{4}=\binom{n}{1}+4\binom{n}{2}+6\binom{n}{3}+4\binom{n}{4}+\binom{n}{5} \tag{21}$$

……………………………………………………

$$\binom{2k-k}{k}+\binom{2k+1-k}{k}+\binom{2k+2-k}{k}+\cdots+\binom{k+(n-1)}{k}$$
$$=\binom{n}{1}\binom{k}{k}+\binom{n}{2}\binom{k}{k-1}+\binom{n}{3}\binom{k}{k-2}+\cdots+\binom{n}{k+1}\binom{k}{0} \tag{22}$$

上述诸恒等式的左端分别都是 1 为首项的一阶、二阶，…，k 阶等差级数。

类似地可以证明下面的第三组恒等式

第三组

$$\binom{1-0}{0}+\binom{3-1}{1}+\binom{5-2}{2}+\binom{7-3}{3}+\binom{9-4}{4}+\cdots+\binom{n}{n-1}$$
$$=\frac{n(n+1)}{2} \tag{23}$$

$$\binom{2-0}{0}+\binom{4-1}{1}+\binom{6-2}{2}+\binom{8-3}{3}+\binom{10-4}{4}+\cdots+\binom{n+1}{n-1}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6} \tag{24}$$

$$\binom{3-0}{0}+\binom{5-1}{1}+\binom{7-2}{2}+\binom{9-3}{3}+\binom{11-4}{4}+\cdots+\binom{n+2}{n-1}$$
$$=\binom{n}{1}+3\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\binom{n}{4} \tag{25}$$

$$\binom{4-0}{0}+\binom{6-1}{1}+\binom{8-2}{2}+\binom{10-3}{3}+\binom{12-4}{4}+\cdots+\binom{n+3}{n-1}$$

$$=\binom{n}{1}+4\binom{n}{2}+6\binom{n}{3}+4\binom{n}{4}+\binom{n}{5} \tag{26}$$

……………………………………

$$\binom{k-0}{0}+\binom{k+1}{1}+\binom{k+2}{2}+\binom{k+3}{3}+\binom{k+4}{4}+\cdots+\binom{k+n-1}{n-1}$$

$$=\binom{n}{1}+\binom{k}{1}\binom{n}{2}+\binom{k}{2}\binom{n}{3}+\cdots+\binom{k}{k}\binom{n}{k+1} \tag{27}$$

第四组

$$\binom{2-1}{1}+2\binom{3-1}{1}+2^2\binom{4-1}{1}+2^3\binom{5-1}{1}+2^4\binom{6-1}{1}+\cdots+2^{n-1}\binom{n}{1}$$

$$=[\binom{n}{1}-1]2^n+1 \tag{28}$$

$$\binom{4-2}{2}+2\binom{5-2}{2}+2^2\binom{6-2}{2}+2^3\binom{7-2}{2}+2^4\binom{8-2}{2}+\cdots+2^{n-1}\binom{n+1}{2}$$

$$=[\binom{n+1}{2}-\binom{n}{1}+1]2^n-1 \tag{29}$$

$$\binom{6-3}{3}+2\binom{7-3}{3}+2^2\binom{8-3}{3}+2^3\binom{9-3}{3}+2^4\binom{11-3}{3}+\cdots+2^{n-1}\binom{n+2}{3}$$

$$=[\binom{n+2}{3}-\binom{n+1}{2}+\binom{n}{1}-1]\cdot 2^n+1 \tag{30}$$

$$\binom{8-4}{4}+2\binom{9-4}{4}+2^2\binom{10-4}{4}+2^3\binom{11-4}{4}+\cdots+2^{n-1}\binom{n+3}{4}$$

$$=[\binom{n+3}{4}-\binom{n+2}{3}+\binom{n+1}{2}-\binom{n}{1}+1]2^n-1 \tag{31}$$

……………………………………

$$\binom{2k-k}{k}+2\binom{2k+1-k}{k}+2^2\binom{2k+2-k}{k}+\cdots+2^{n-1}\binom{2k+n-1-k}{k}$$

$$=[\binom{n+k-1}{k}-\binom{n+k-2}{k-1}+\binom{n+k-3}{k-2}-\binom{n+k-4}{k-3}+\cdots$$

$$+(-1)^{k-1}\binom{n}{1}+(-1)^{k}]2^{n}+(-1)^{k-1} \qquad (32)$$

这组公式只须对等式左边按高阶等差级数公式求和 [3] 即得到验证。

7 积之和

$$\begin{bmatrix} n+m+2 \\ k \end{bmatrix}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n-i}{i}\binom{m-(k-i)}{k-i}+4\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n-i}{i}\binom{m-(k-i-1)}{k(i+1)} \quad (1\leqslant k<m+1) \qquad (33)$$

证：将恒等式 $x^{n+1}-y^{n+1}$

$$=(x-y)\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^{i}\binom{n-1}{i}(x+y)^{n-2i}(xy)^{i}x^{m+1}-y^{m+1}$$

$$=(x-y)\sum_{i=0}^{[\frac{m}{2}]}(-1)^{j}\begin{bmatrix} m-j \\ j \end{bmatrix}(x+y)^{m-2j}(xy)^{j}$$

相乘即得 $(x^{n+1}-y^{n+1})(x^{m+1}-Y^{m+1})$

$$=((x+y)^{2}-4(xy))\sum_{k=0}^{[\frac{n+m}{2}]}(-1)^{k}\sum_{i=0}^{k}\binom{n-i}{i}\binom{m-(k-i)}{k-i}(x+y)^{n+m-ik}(xy)^{k}$$

又 $m<n$ 时

$$(x^{n+1}-y^{n+1})(x^{m+1}-y^{m+1})=(x^{n+m+2}+y^{n+m+2})-(x^{n-m}+y^{n-m})(xy)^{m+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{[\frac{n+m+2}{2}]}(-1)^{k}\begin{bmatrix} n+m+2 \\ k \end{bmatrix}(x+y)^{n+m+2-2k}(xy)^{k}-\sum_{k=0}^{[\frac{n-m}{2}]}(-1)^{k}\begin{bmatrix} n-m \\ k \end{bmatrix}(x+y)^{n-m-2k}(xy)^{k+(m+1)}$$

比较 $(x+y)^{n+m+2-2k}(xy)^{k}$ $(1\leqslant k<m+1)$ 的系数即得 (33)。

8 结束语

二项式定理得到推广 [1] 以后，本文对其一个重要的特殊情况：

$\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}y^{k}=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n-k}{k}(x+y)^{n-2k}(xy)^{k}$ 的进一步讨论，得到了一系列新型组合恒

等式，这些恒等式更方便于与二项式定理$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k}=(x+y)^{n}$系数间的有关恒等式形式上作类比，组合分析是一门既古老又年轻的学科，与此相适应，新型组合恒等式具有一个广阔天地，具有广泛的应用。

参考文献

〔1〕 唐佑华. 二项式定理. 莱布尼兹定理的等价公式的建立和推广，湖南大学出版社. 1989.2

〔2〕 徐利治. 蒋茂森. 组合数学入门. 辽宁教育出版社1985.5

〔3〕 唐佑华，刘学鹏. 广义高阶等差数列的和. 湘潭大学学报1991.

Combinatorial Identities of the New Type

Liu Renjie

(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: In this paper we have show some combinatorial identities of the new type.

Keywords: Combinatorial number, Binomial the orem,arithmetic series of higher order.