第14卷 第2期　　郑州工学院学报　　Vol.14 No.2
1993年 6 月　　Journal of Zhengzhou Institute of Technology　　Jun. 1993

关于一类无穷级数求和的递推公式*

邢恩宽

(郑州铁路教育学院)

摘　要：本文借助于伽马函数，把级数(1)和级数(2)化为广义积分的形式，然后用复分析的方法导出它们的递推公式.

关键词：无穷级数，收敛，递推，伽马函数，广义积分.

中图分类号：O173

在无穷级数的理论和应用中求和问题十分重要，但又往往是十分困难的．本文讨论常数项无穷级数

$$S_p=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\ ,\ p=2,3,\cdots \tag{1}$$

与 $$T_p=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\ ,\ p=1,2,\cdots \tag{2}$$

的求和问题．容易证明它们都是收敛的．文献[1]曾给出了当 P 为偶数时求 S_p 的一种方法．本文首先借助于伽马函数，把级数 (1) 和 (2) 化为广义积分的形式，然后用复分析的方法导出它们的递推公式．

根据伽马函数的定义和性质[2]

$$T_{(p)}=(P-1)!=\int_0^{+\infty}t^{p-1}e^{-t}dt,\ P=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,$$

从而我们有

$$T(p)S_p=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\Big)\Big(\int_0^{+\infty}t^{p-1}e^{-t}dt\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-nx}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}x^{p-1}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{e^x-1}dx$$

通过类似的演算我们可得

* 收稿日期：1992-12-18

$$T(P)T(P)=\int_{o}^{+\infty}\frac{x^{P-1}}{e^{x}+1}dx$$

令　　$$I_{p}=\int_{o}^{+\infty}\frac{x^{P-1}}{e^{x}-1}dx,\quad J_{p}=\int_{o}^{+\infty}\frac{x^{P-1}}{e^{x}+1}dx$$

则我们有

$$\int_{p}=\frac{1}{T(P)}I_{P}=\frac{1}{(P-1)!}I_{P},\quad P=2,3,\cdots \tag{3}$$

$$T_{P}=\frac{1}{T(P)}J_{P}=\frac{1}{(P-1)!}J_{P},\quad P=1,2,\cdots \tag{4}$$

这样我们把级数 (1) 和 (2) 表成了广义积分的形式.

现在我们推导 I_p 和 J_p 之间的关系. 当 $P>2$ 时, 我们有

$$I_{P}-J_{P}=\int_{o}^{+\infty}\left(\frac{x^{P-1}}{e^{x}-1}-\frac{x^{P-1}}{e^{x}+1}\right)dx=\int_{o}^{+\infty}\frac{2x^{P-1}}{e^{2x}-1}dx$$

$$=\frac{1}{2^{P-1}}\int_{o}^{+\infty}\frac{t^{P-1}}{e^{t}-1}dt=\frac{1}{2^{P-1}}I_{P}$$

即

$$\left(1-\frac{1}{2^{P-1}}\right)I_{P}=J_{P},\quad P=2,\ 3,\ \cdots, \tag{5}$$

由此可得 S_{P} 与 T_{P} 所满足的关系式:

$$\left(1-\frac{1}{2^{P-1}}\right)\int_{P}=J_{P},\quad P=2,\ 3,\ \cdots, \tag{6}$$

为了导出递推公式, 考虑复变函数 $f(z)$:

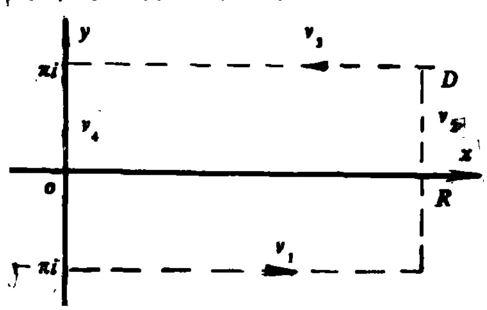
$$f(z)=\frac{z^{P-1}}{e^{z}-1},\quad P\text{为大于1的自然数},$$

这是一个亚纯函数, 它的极点全是简单的并且全在虚轴上, 它们是

$$z=\pm 2K\pi i,\quad K=1,\ 2,\ \cdots,$$

选取积分路径 $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$ 如图所示:

其中 R 是任一正数, 显然 f(z)在含有 γ 的某单连通域 D 内解析, 由关于复积分的 Cauchy 定理得



$$\int_{\gamma}f(z)dz=\sum_{K=1}^{4}I\gamma_{K}=0$$

这里 $I\gamma_{K}=\int_{\gamma_{K}}f(z)dz,\ K=1,\ 2,\ 3,\ 4.$

注意到当 $R\geqslant\pi$ 时,

$$|I\gamma_2| = |\int_{-\pi}^{\pi} \frac{i(R+iy)^{P-1}}{e^{R+iy}-1} dy| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sqrt{R^2+y^2}\,\gamma^{P-1}}{|e^{R+iy}|-1} dy$$

$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\sqrt{2}R)^{P-1}}{e^R-1} dy = \frac{2\pi(\sqrt{2}R)^{P-1}}{e^R-1} \to 0(R\to+\infty)$$

我们有

$$\lim_{R\to+\infty} I\gamma_1 + \lim_{R\to+\infty} I\gamma_3 = -I\gamma_4,$$

也就是

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x-\pi i)^{P-1}}{e^{x-\pi i}-1} dx - \int_0^{+\infty} \frac{(x+\pi i)^{P-1}}{e^{x+\pi L}-1} dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i^P y^{P-1}}{e^{iy}-1} dy \tag{7}$$

根据 $Newton$ 二项式定理并注意到 $e^{\pi i} = -1$，我们得

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x-\pi i)^{P-1}}{e^{x-\pi i}-1} dx = -\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1} \sum_{K=0}^{P-1} C_{P-1}^K x^K (-\pi i)^{P-\pi-K} dx$$

$$= -\sum_{K=1}^{P} C_{P-1}^{K-1} (-\pi i)^{P-K} \int_0^{+\infty} \frac{x^{K-1}}{e^x+1} dx = -\sum_{K=1}^{P} C_{P-1}^{K-1} (-\pi i)^{P-K} J_K$$

同样可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x+\pi i)^{P-1}}{e^{x+\pi i}-1} dx = -\sum_{K=1}^{P} C_{P-1}^{K-1} (\pi i)^{P-K} J_K$$

把此二式代入 (7) 式得

$$\sum_{K=1}^{P} C_{P-1}^{K-1} [(\pi i)^{P-K} - (-\pi i)^{P-K}] J_K = i^P \int_{-\pi}^{\pi} \frac{y^{P-1}}{e^{iy}-1} dy \tag{8}$$

当 $p = 2m+1$ $(m = 1, 2, \cdots)$为奇数时，(8)变为

$$\sum_{K=1}^{m} C_{2m}^{2K-1} (-1)^{m-K} \pi^{2(m-K)+1} j_{2K} = \frac{(-1)^m}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{y^{2m}}{e^{iy}-1} dy$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}}{4} \int_{-\pi}^{\pi} y^{2m} dy = \frac{(-1)^{m+1} \pi^{2m+1}}{2(2m+1)}$$

由此得J_{2m}的递推公式:

$$\sum_{K=1}^{m} (-1)^{K-1} C_{2m}^{2K-1} \frac{1}{\pi^{2K}} J_{2K} = \frac{1}{2(2m+1)} \tag{9}$$

将 (5) 代入 (9) 得I_{2m}的递推公式:

$$\sum_{K=1}^{m}(-1)^{K-1}C_{2m}^{2K-1}\frac{2^{2K-1}-1}{(2\pi)^{2K}}I_{2K}=\frac{1}{4(2m+1)} \tag{10}$$

将 (4) 代入 (9) 得T_{2m}的递推公式:

$$\sum_{K=1}^{m}\frac{(-1)^{K-1}}{(2m-2K+1)!\pi^{2K}}T_{2K}=\frac{1}{2[(2m+1)!]} \tag{11}$$

将 (3) 代入 (10) 得到级数S_{2m}的递推公式:

$$\sum_{K=1}^{m}\frac{(-1)^{K-1}(2^{2K-1}-1)}{(2m-2K+1)!(2\pi)^{2K}}S_{2m}=\frac{1}{4[(2m+1)!]} \tag{12}$$

有了公式 (11) 和 (12) ,我们就能够在P为偶数的情形计算级数 (1) 和 (2) 的和了,比如在公式中

取$m=1$,得

$$S_2=\frac{\pi^2}{6},\ T_2=\frac{\pi^2}{12} \tag{13}$$

取$m=2$并利用结合 (13) ,得

$$S_4=\frac{\pi^4}{90},\ T_4=\frac{7\pi^4}{720}$$

可同样算出$S_6=\dfrac{\pi^6}{945}$,$T_6=\dfrac{31\pi^6}{30240}$

等等.

当$P=2m\quad(m=1, 2, \cdots,)$为偶数时, (8) 式变为

$$\sum_{K=1}^{m}(-1)^{K-1}C_{2m-1}^{2K-2}\pi^{2(m-K)}J_{2K-1}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}y^{2m-1}ctg\frac{y}{2}dy \tag{14}$$

将 (4) 代入 (14) 得T_{2m-1}的递推公式:

$$\sum_{K=1}^{m}\frac{(-1)^{K-1}\pi^{2(m-K)}}{(2m-2K+1)!}T_{2K-1}=\frac{1}{2\pi[(2m-1)!]}\int_0^{\pi}y^{2m-1}ctg\frac{y}{2}dy \tag{15}$$

在公式 (15) 中取$m=1$得

$$T_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}yctg\frac{y}{2}dy=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}ctgtdt=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}lnsintdt=ln2 \tag{16}$$

将 (6) 和 (16) 代入 (15) 得$S_{2m-1}\ (m=2, 3, \cdots,)$的递推公式:

$$\sum_{K=2}^{m}\frac{(-1)^{K-1}\pi^{2(m-K)}}{(2m-2K+1)!}(1-\frac{1}{2^{2K-2}})S_{2K-1}$$

$$=-\frac{\pi^{2(m-1)}ln2}{(2m-1)!}+\frac{1}{2\pi[(2m-1)!]}\int_0^{\pi}y^{2m-1}ctg\frac{y}{2}dy \tag{17}$$

由于递推公式 (15) 和 (17) 中的积分难于计算,所以用起来不够方便.

参 考 文 献

〔1〕 龚升．从刘徽割园谈起．人民教育出版社．1964

〔2〕 王升谟．郭敦仁．特殊函数概论．科学出版社．1979

〔3〕 菲赫金哥尔茨．Г. M.，微积分教程．第二卷第三分册．人民教育出版社

The Recurrence Formula of Sum of the Classificatory Infinite Sericscs

Xing Enkuan

(Zhengzhou Railway Education Colledge)

Abstract: With the help of Γ−function, the series (1) and series (2)are transformed into the forms of generalized integral, and then deduce their recurrence formulas with the method of complex analysis in the paper.

Keywords: infinite series, convergence, recurrence, Γ−function, generalized integral.

(上接 113 页)

参 考 文 献

〔1〕 唐立民等．有限元分析中的拟协调元．大连工学院学报．19: 2(1980), 19—35

〔2〕 陈万吉等．拟协调元列式．大连工学院学报．19: 2(1980) 37—49

〔3〕 Zhang−Hongqing. The generalized patch test and 9—parameter quas−conforming element. proc. china−France symposium on finite element methods, Feng Kong and J. L. Lions (ed.) Science press. Gordon and Breach. 1983, 566—583

〔4〕 韩厚德．关于拟协调单元的注记．计算数学，10: 2(1986). 173—180

〔5〕 P. G. Ciarlet. Finite element method for elliptic problems. North−Holland. 1978

〔6〕 石钟慈．陈绍春．九参数广义协调元的收敛性．计算数学，2(1991) 193—203

〔7〕 P. Las Caux and P. Lesaint, some nonconforming finite elements for the plate bending problems. RAIRO. Anal. Numer. 9(1975) 9—53

A kind of pseu−do−conforming element

Shi Dongyang Jiang Huiqin

(Zhengzhou University) (Zhengzhou Institute of Technolge)

Abstract: In this paper a new kind of pseu−do−conforming element is presented and it⊂s convergence is discussed.

Keywords: pseu−do−conforming, convergence.