

# 连续梁计算公式及应用新探

张仲民 张 力

(洛阳拖拉机学院)

(洛阳工学院)

**摘 要:** 本文用功的互等定理推导出连续梁计算的两个新公式,该式用于较为复杂的变截面梁计算,具有简便精确等优点;用于求压杆的临界载荷同用差分法求出的临界载荷相联系,发现了一个重要的现象。

**关键词:** 连续梁,功的互等定理,计算公式

**中图分类号:**

在材料力学中,普遍采用叠加原理推导连续梁计算的三弯矩方程。该方程求解时,要求在连续梁的同一跨度内抗弯刚度是常数,这就有一定的局限性。为了克服这一局限性,作者做了下列的研究工作:

(1)用功的互等定理推导出连续梁计算的两个新公式——三弯矩方程和支座反力计算公式。

(2)将两个新公式同时用于连续梁的计算,克服了单纯用三弯矩方程求解所具有的局限性。

(3)将三弯矩方程用于求解简单梁的变形,取得了良好的效果。

(4)把三弯矩方程用于计算压杆的临界载荷,将计算结果与有限差分法的计算结果相联系,发现了一个重要的现象。

## 1 公式推导

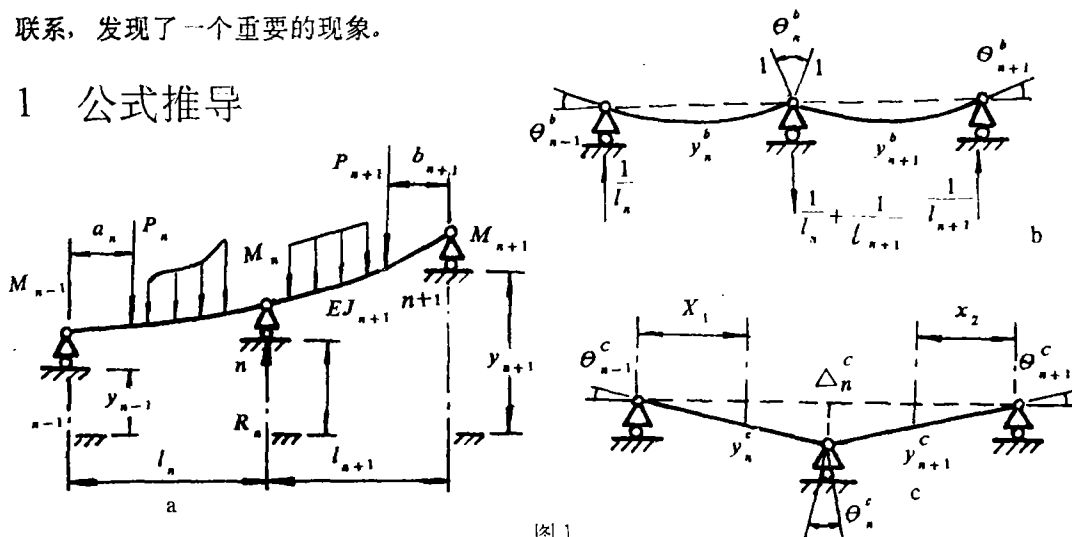


图1

取图1所示的基本静定系统(a)作为研究对象,以其结构为基,构成两种受力与变形(位

移)系统(b)和(c)作为辅助研究对象.

在(a)中:

$y_{n-1}$ ——第 $n-1$ 个支座的竖直位移

$y_n$ ——第 $n$ 个支座的竖直位移

$y_{n+1}$ ——第 $n+1$ 个支座的竖直位移

$R_n$ ——第 $n$ 个支座的去座反力.

在(b)中:

$$Q_{n-1}^b = \frac{l_n}{6EI_n}; \quad Q_n^b = \frac{l_n}{3EI_n} + \frac{L_{n+1}}{3EI_{n+1}}$$

$$Q_{n+1}^b = \frac{l_{n+1}}{6EI_{n+1}}$$

$$y_n^b = \frac{x}{6EI_n}(l_n^2 - x^2)(l_n^2 - x^2) \quad (0 \leq x \leq l_n)$$

$$y_{n+1}^b = \frac{x}{6EI_{n+1}}(l_{n+1} - x)(2l_{n+1} - x) \quad (0 \leq x \leq l_{n+1}) \quad (1)$$

在(c)中:

$$Q_{n-1}^c = \frac{\Delta_n^c}{l_n}; \quad Q_n^c = \frac{\Delta_n^c}{C_n} + \frac{\Delta_n^c}{l_{n+1}}; \quad Q_{n+1}^c = \frac{\Delta_n^c}{l_{n+1}}$$

$$y_n^c = \frac{\Delta_n^c}{l_n} x_1 \quad (0 \leq x_1 \leq l_n)$$

$$y_{n+1}^c = \frac{\Delta_n^c}{l_{n+1}} x_2 \quad (0 \leq x_2 \leq l_{n+1}) \quad (2)$$

分别对系统(a)和(b), (a)和(c)应用功的互等定理:

$$M_{n-1}Q_{n-1}^b + M_nQ_n^b + M_{n+1}Q_{n+1}^b + \left(\int y^b q dx + \sum p y^b\right) + y_{n-1}\frac{1}{l_n} - y_n\left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}}\right)y_{n+1}\frac{1}{l_{n+1}} = 1 \cdot Q_n \quad (3)$$

$$M_{n-1}Q_{n-1}^c - M_nQ_n^c + M_{n+1}Q_{n+1}^c - R_n\Delta_n^c + \left(\int y^c q dx + \sum p y^c\right) = 0 \quad (4)$$

(3) 式中:

$Q_n$ ——连续梁第 $n$ 个支座两侧截面的相对转角, 因变形后梁的轴线是一个连续光滑的曲线, 故 $Q_n \equiv 0$ .

$\left(\int y^b q dx + \sum p y^b\right)$ ——(a)状态下的分布力和集中力在(b)状态下的位移上所做的功.

在均布载荷和集中力作用时:

$$\begin{aligned} \left( \int y^b q dx + \sum p y^b \right) &= \frac{q_n l_n^3}{24EI_n} + \frac{q_{n+1} l_{n+1}^3}{24EI_{n+1}} \\ &+ \sum \frac{p_n a_n (l_n^2 - a_n^2)}{6EI_n l_n} + \sum \frac{p_{n+1} b_{n+1} (l_{n+1}^2 - b_{n+1}^2)}{6EI_{n+1} l_{n+1}} \end{aligned} \quad (5)$$

(4)式中:

$\int y^c q dx + \sum p y^c$ ——(a)状态下的分布力和集中力在(c)状态下的位移上所做的功。

在均布载荷和集中力作用时:

$$\int y^c q dx + \sum p y^c = \frac{\Delta_n^c l_n q_n}{2} + \frac{\Delta_{n+1}^c l_{n+1} q_{n+1}}{2} + \sum \frac{\Delta_n^c P_n a_n}{l_n} + \sum \frac{\Delta_{n+1}^c P_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \quad (6)$$

将(1)式和(5)式代入(3), 将(2)式和(6)式代入(4), 分别整理得:

$$\begin{aligned} M_{n-1} \frac{l_n}{I_n} + 2M_n \left( \frac{l_n}{I_n} + \frac{l_{n+1}}{I_{n+1}} \right) + M_{n+1} \frac{l_{n+1}}{I_{n+1}} \\ = - \sum \frac{P_n a_n (l_n^2 - a_n^2)}{I_n l_n} - \sum \frac{P_{n+1} b_{n+1} (l_{n+1}^2 - b_{n+1}^2)}{I_{n+1} l_{n+1}} \\ - \frac{q_n l_n^3}{4I_n} - \frac{q_{n+1} l_{n+1}^3}{4I_{n+1}} + 6E \left[ y_{n-1} \frac{1}{l_n} - y_n \left( \frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right) + y_{n+1} \frac{1}{l_{n+1}} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} R_n = M_{n-1} \frac{1}{l_n} - M_n \left( \frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right) + M_{n+1} \frac{1}{l_{n+1}} \\ + \frac{q_n l_n}{2} + \frac{q_{n+1} l_{n+1}}{2} + \sum \frac{P_n a_n}{l_n} + \sum \frac{P_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \end{aligned} \quad (8)$$

(7)是考虑支座位移时的三弯矩方程, (8)是支反力的计算公式。

## 2 应用算例

### 2.1 作图2所示梁的剪力图和弯矩图。

该梁有两跨, 但左跨内截面为阶梯形, 故不能直接用三弯矩方程。现在截面突变处虚设一可动铰支座, 将原梁看作由三跨组成。三跨连续梁可写出两上三弯矩方程。其中包括  $M_1$ ,  $M_2$  和  $y_1$  三个未知数。因为虚设支座的支座反力为零, 故可写出一补充方程。

此题可解。

三弯矩方程:

$$\begin{aligned} \frac{3a}{I} M_1 + \frac{a}{2I} M_2 + \frac{12E}{a} y_1 &= - \frac{qa^3}{2I} \\ \frac{a}{2I} M_1 + \frac{2a}{I} M_2 - \frac{6E}{a} y_1 &= - \frac{qa^3}{2I} \end{aligned}$$

补充方程:

$$\frac{2}{a} M_1 - \frac{1}{a} M_2 = \frac{3}{2} qa + 3P$$

联解上列三方程:

$$M_1 = \frac{21}{52} qa^2 + \frac{54}{52} pa,$$

$$M_2 = -\frac{9}{13} qa^2 - \frac{12}{13} pa,$$

$$y_1 = \frac{71qa^4}{624EI} + \frac{138pa^3}{624EI}$$

再由支反力公式(8)求得:

$$R_0 = \frac{94}{104} qa + \frac{54}{52} P,$$

$$R_2 = \frac{197}{52} qa + \frac{150}{52} P,$$

$$R_3 = \frac{4}{13} qa - \frac{12}{13} P.$$

剪力图和弯矩图如图3所示。(设  $P=qa$ )

## 2.2 求图4所示简支梁指定点的挠度。

本例中, 各指定截面的弯矩均已知, 根据三弯矩方程(7), 分别对1-5各截面写三弯矩方程, 可得到一个  $y_1 \sim y_5$  为未知数的线性方程组, 解该方程组, 可以求得各指定截面的挠度。

计算结果见表1。表中同时也列出了分段数为2, 且2为分点; 分段数为3, 且2和4为分段点时的计算结果。

表1  $(a = \frac{pa}{EI})$

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$
精确解	$-\frac{41}{72}a$	$\frac{8}{9}a$	$\frac{85}{96}a$	$-\frac{25}{36}a$	$-\frac{109}{288}a$
分两段	---	$\frac{8}{9}a$	---	---	---
分三段	---	$\frac{8}{9}a$	---	$-\frac{25}{96}a$	---
分六段	$-\frac{41}{72}a$	$\frac{8}{9}a$	$\frac{85}{96}a$	$-\frac{25}{36}a$	$-\frac{109}{288}a$

由表1看出, 无论分段数多少, 所得计算结果均为精确值。因此可按下述步骤求解, 而不用解联立方程: (1) 以2为分点, 把梁分作两段, 以  $y_0$  和  $y_6$  为边界条件, 由三弯矩方程求出  $y_2$ 。(2) 以1, 2和4为分点, 把梁分作三段, 以  $y_0$ ,  $y_2$  和  $y_6$  作为边界条件, 分

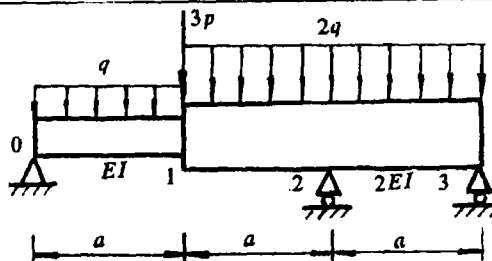


图2

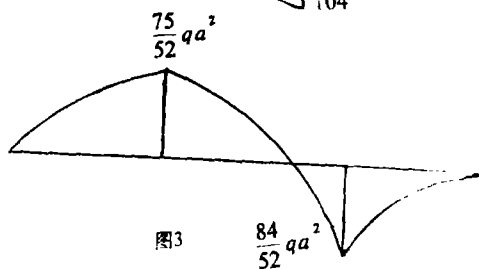
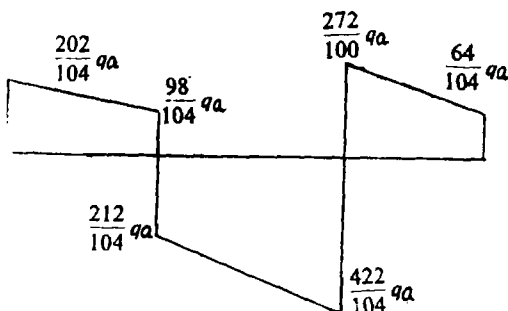


图3

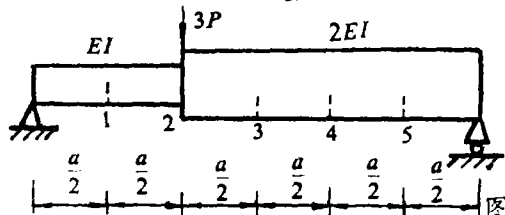


图4

别用三弯方程求出  $y_1$  和  $y_4$ 。(3)以  $y_2$  和  $y_4$  作为边界条件, 分别用三弯矩方程求出  $y_3$  和  $y_5$ 。

在等分的情况下, 三弯矩方程与有限差分方程有相似之处。但前看的计算结果为精确值, 而后者为近似值; 前者不必解较大的方程组, 后者必须求解较大的方程组。所以用三弯矩方程求解梁的变形, 特别是变截面梁的变形, 有显著的特点。

### 2.3 用三弯矩方程求压杆的临界载荷。

三弯矩方程:  $Y_{i-1} - 2Y_i + Y_{i+1}$

$$= \frac{h^2}{6EI} (M_{i-1} - 4M_i + M_{i+1})$$

差分方程:

$$Y_{i-1} - 2Y_i + Y_{i+1} = \frac{h^2}{EI} M_i$$

式中  $h = \frac{1}{n}$ ,  $n$  为分段数。

两端铰支:  $M_1 = -PY_1$

一端固定, 一端铰支:

$$M_1 = Qx_1 - PY_1$$

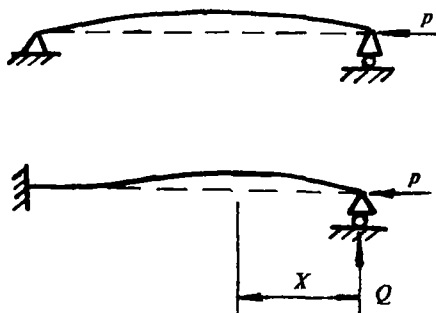


图5

本例分别用三弯矩方程和差分方程计算两端铰支压杆, 一端固定, 一端铰支压杆的临界载荷。计算结果分别列于表2表3中。

由表2和表3可看出, 用三弯矩方程计算的临界载荷偏大, 而用差分法计的临界载荷偏小, 但两者的计算误差绝对值相近。虽然在分段数很少时, 两者的计算误差都很大, 但是, 它们的平均值与精确解的误差却很小。因此, 用两种计算结果的平均值作为临界载荷的近似值是对精确解的一种很好的逼近。

表2  $(P_0 = \frac{EI}{L^2}) P_{cr} \approx 9.8694P_0$

	n=2	相对误差%	n=3	相对误差%	n=4	相对误差%
3M法	12P <sub>0</sub>	21.585	10.8P <sub>0</sub>	9.427	10.386P <sub>0</sub>	5.235
差分法	8P <sub>0</sub>	-18.943	9P <sub>0</sub>	-8.81	9.373P <sub>0</sub>	-5.036
平均值	10P <sub>0</sub>	1.32	9.9P <sub>0</sub>	0.308	9.879P <sub>0</sub>	0.099

表3  $(P_0 = \frac{EI}{L^2}) P_{cr} \approx 20.16P_0$

	n=2	相对误差%	n=3	相对误差%	n=4	相对误差%
3M法	27.428P <sub>0</sub>	36.052	24.046P <sub>0</sub>	19.276	22.359P <sub>0</sub>	10.908
差分法	12P <sub>0</sub>	-40.476	16.063P <sub>0</sub>	-20.322	17.77P <sub>0</sub>	-11.840
平均值	19.714P <sub>0</sub>	-2.212	20.055P <sub>0</sub>	-0.521	20.066P <sub>0</sub>	-0.466

### 3 结 论

本文推导用于连续梁计算的两个新公式,从算例看出,三弯矩方程和支座反力计算公式并用可分析较为复杂的变截面连续梁;将三弯矩方程用于求变截面梁的变形,具有简便精确等优点;将三弯矩方程用于求压杆的临载荷的近似值与相同条件下差分法求得的临界载荷近似值取算术平均,该平均值是对临界载荷精确值的很好逼近。

### 参 考 文 献

- (1) 刘鸿文主编.材料力学.1981
- (2) 黄炎编著.工程弹性力学.清华大学出版社.1982

## The New Exploration About Demonstration and Application of Calculation Formulas of Continuous Beams

Zhang Zhongmin

Zhang Li

(Luoyang Tractor Institute of Technology) (Luoyang Institute of Technology)

**Abstract:** This paper shows how to deduce two new calculation formulas of continuous beams with the mutually-equal law of work. Used to calculation formulas of rather complicated Variation cross sections, these formulas have many advantages. Such as those of Simple and accurate calculations, and they relate. Calculations of critical loadings of bars bearing to those with difference methods, and an important phenomenon is found.

**Key words:** Continuous beams, the mutually-equal law of work, new calculation formula.