第14卷 第3期 郑州工学院学报 Vol.14 No.3
1993年 9 月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Sep. 1993

对偶不分明序同态的特征定理

赵万忠

（郑州工学院数力系）

摘 要: 本文定义[1]中不分明序同态及Fuzz函数的对偶形式，给出了特征定理、扩张定理及存在定理。

关键词: 对偶不分明序同态、对偶 Fuzz 函数。

中图分类号: 0174

1 对偶逆映射

文中 L、L_i 均表完全分配格，0 与 1 分别表其最小与最大元，$i:L\to L$ 为恒同映射，X、Y 表普通非空集合。约定 $\wedge\Phi=1$，$\vee\Phi=0$。

定义 1、1 设f: $L_1\to L_2$ 为映射，规定：逆映射 f^{-1}: $L_2\to L_1$ 使 $\forall B\in L_2$ 有 $f^{-1}(B)=\vee\{A:A\in L_1$ 且 $f(A)\leqslant B\}$（见[1]）对偶逆映射 $f^{+}:L_2\to L_1$ 使 $\forall B\in L_2$ 有

$$f^{+}(B)=\wedge\{A:A\in L_1 \text{且} f(A)\geqslant B\}$$

余映射 f^{-}: $L_1\to L_2$ （此时 L_1、L_2 为 $Fuzzes$）

$$\text{使}\forall A\in L_1 \text{有} f^{-}(A)=[f(A')]'$$

命题1、1设 f: $L_1\to L_2$、g: $L_2\to L_1$ 为映射.

① 若$f(A)\geqslant B\Leftrightarrow A\geqslant g(B)$, 则$f$保交，$g$保并 $f(1)=1$, $g(0)=0$

②下述三款彼此等价. $(i)fg\geqslant i_2$ 且 $gf\leqslant i_1$;$(ii)f=g^{-1}$ 且 $g=f^{+}$;$(iii)f(A)\geqslant B\Leftrightarrow A\geqslant g(B)$.

证明 .① $\forall A_j\in L_1, j\in E$（指标集）记 $B=f(\wedge A_j)$. 由 $f(\wedge A_j)\geqslant B\Rightarrow\wedge A_j\geqslant g(B)\Rightarrow\forall j\in E, A_j\geqslant g(B)\Rightarrow\forall j\in E, f(A_j)\geqslant B\Rightarrow\wedge f(A_j)\geqslant B=f(\wedge A_j)$. 另一方面，记 $B_1=\wedge f(A_j)$, 由 $\wedge f(A_j)\geqslant B_1\Rightarrow\forall j\in E, f(A_j)\geqslant B_1\Rightarrow\forall j\in E, A_j\geqslant g(B_1)\Rightarrow\wedge A_j\geqslant g(B_1)\Rightarrow f(\wedge A_j)\geqslant B_1=\wedge f(A_j)$, $\therefore f(\wedge A_j)=\wedge(A_j)$ 即f保交（从而保序）.

(类似地可证g保并(从而保序)

②$(iii)\Rightarrow(ii)$ $\forall A\in L_1, f(A)=\vee\{B:B\in L_2$ 且 $B\leqslant f(A)\}=\vee\{B:B\in L_2$ 且 $g(B)\leqslant A\}=g^{-1}(A)$. $\therefore f=g^{-1}$. $\forall B\in l_2, g(B)=\wedge\{A:A\in L_1$ 且 $A\geqslant g(B)=\wedge\{A:A\in L_1$ 且 $F(A)\geqslant B\}=f^{+}(B)$.$\therefore g=f^{+}$.

$(ii)\Rightarrow(iii)$. 若 $f(A)\geqslant B$. 则 $g(B)=f^{+}(B)=\wedge\{C:C\in L_1$ 且 $f(C)\geqslant B\}\leqslant A$. 若 $A\geqslant g(B)$. 则 $f(A)=g^{-1}(A)=\vee\{D:D\in L_2$ 且 $g(D)\leqslant A\}\geqslant B$.

$(ii)\Rightarrow(i)$. $\forall A\in L_1, gf(A)=f^{+}f(A)\leqslant A$. 即 $gf\leqslant i_1$. 由 f 保交 $\Rightarrow\vee B\in L_2, fg(B)=ff^{+}(B)\geqslant B$ 即 $fg\geqslant i_2$.

$(ii)\Rightarrow(iii)$. 由 f、g 保序. 若 $f(A)\geqslant B$, 则有 $g(B)\leqslant gf(A)\leqslant A$. 若 $A\geqslant g(B)$, 则有 $f(A)\geqslant fg(B)\geqslant B$.

最后, $f(1)=g^{-1}(1)=\vee\{B:B\in L_2$ 且 $g(B)\leqslant 1\}=1$, $g(0)=f^{+}(0)=\wedge\{A:A\in L_1$ 且 $f(A)\geqslant 0\}=0$ 证完.

命题1、2 设 L_1、L_2 为 Fuzzes, $f:L_1\to L_2$ 为映射, 则有 ①$f^{--}=f$;②$f^{-+}=f^{-1-}$;③$f^{+-}=f^{--1}$;④$f^{-1}=f^{-+-}$;⑤$f^{+}=f^{--1-}$;⑥f^{-} 保并、保交、保余分别与 f 保交、保并、保余等价。

证明①－－⑤的证明是直接的。

⑥f^{-} 保并 $\Leftrightarrow f^{-}(\vee A_j)=\vee f^{-}(A_j)\Leftrightarrow[f^{-}(\vee A_j)]'=\wedge[f^{-}(A_j)]'\Leftrightarrow f(\wedge A_j')=\wedge f(A_j')\Leftrightarrow f$ 保交.

同理有 f^{-} 保交 $\Leftrightarrow f$ 保并 f^{-} 保余 $\Leftrightarrow f^{-}(A')=[f^{-}(A)]'\Leftrightarrow f^{-}(A)=f(A)\Leftrightarrow f(A')=[f(A)]'\Leftrightarrow f$ 保余.

注. 在⑥的证明中实际还得如下结论: f 保余 $\Leftrightarrow f=f^{-}$

2 对偶不分明序同态

定义2、1 映射 $f: L_1^X\to L_2^Y$ 叫不分明序同态, 记作 FOH, 如果 f 是广义序同态, 即 f 及 f^{-1} 皆保并且 $f(0)=f^{-1}(0)=0$(见[1])

f 叫对偶不分明序同态, 记作 $DFOH$. 如果 f 及 f' 皆保交且 $f(1)=f^{+}(1)=1$

由命题1、2得

定理2·1设 L_1、L_2 为Fuzzes, 则

$f:L_1^X\to L_2^Y$ 是 $DFOH\Leftrightarrow f^{-}:L_1^X\to L_2^Y$ 是 FOH.

定理2、2. 映射 $f:L_1^X\to L_2^Y$ 是 $DFOH\Rightarrow$ 存在 $g(1)=1$ 且保交的映射 $g:L_2^Y\to L_1^X$ 使下列三款之一成立. ①$fg\geqslant i_2$ 且 $gf\leqslant i_1$; ②$f=g^{-1}$ 且 $g=f^{+}$; ③$f(A)\geqslant B\Rightarrow g(B)$.

证明, 只须对情形①进行证明 取 $g=f'$ 得必要性成立. 由命题1·1知充分性成立.

于是当 f 为 $DFOH$ 时, 有 $f=f'^{-1}$.

命题2·1. L_0^X是L_1^X的子完全分配格$\Leftrightarrow L_0$是L_1的子完全分配格

证明. 充分性自明.

由 $0.1\in L_0^X \Rightarrow 0.1\in L_0$ 设 $a_j\in L_0, j\in E$, 则存在 $A_j\in L_0^X$ 使 $a_j\in A_j(X).j\in E$ 且 $\wedge A_j$、$\vee A_j\in L_0^X$ 于是

$\vee a_j\in\vee(A_j(X))=(\vee A_j)(X)\subset L_0$

$\wedge a_j\in\wedge(A_j(x))=(\wedge A_j)(X)\subset L_0$

故L_0是L_1的子完全分配格　证完

定理2·3(扩张定理)设 L_0 是 L_1 的子完全分配格 $f_0:L_0^X\to L_2^Y$ 为 $DFOH$, 则存在 $DFOH$　$f:L_1^X\to L_2^Y$ 使 $f|L_0^X=f_0$

证明. 由定理2·2, 存在保交且 $g(1)=1$ 的映射 $g:L_2^Y\to L_0^X\subset L_1^X$ 使 $f_0g\geqslant i_2$ 且 $gf_0\leqslant i_1$ 由命题1·1, g 保并. 定义映射 $f:L_1^Y\to L_2^Y$ 使 $\forall A\in L_1^X$

$f(A)=\vee\{f_0(C):C\in L_0^X$ 且 $C\leqslant A\}$

当 $A\in L_0^X$ 时, 由 f_0 保序知 $f(A)=f_0(A)$. 即 $f|L_0^X=f_0$

$\forall B\in L_2^Y.\because g(B)\in L_0^X$ 且 $f_0g\geqslant i_2$　$\therefore fg(B)=f_0g(B)\geqslant B$.　即 $fg\geqslant i_2.\forall A\in L_1^X$ 由 g 保并及 $gf_0\leqslant i_1$ 得 $gf(A)=\vee\{gf_0(C):C\in L_0^X$ 且 $c\leqslant A\}\leqslant\vee\{C:C\in L_0^X$ 且 $C\geqslant A\}\leqslant A$ 即 $gf\leqslant i_1$.　复由定理2·2知 f 为 $DFOH$　证完

命题2·2　设 $f:L_1^X\to L_2^Y$ 是 $DFOH$, 令 $I=f^+f:L_1^X\to L_1^X$. 则 I 为 L_1^X 上的内部算子.

证明　① $I(1)=1$; ② $I(A)\leqslant A$; ③ $I(A\wedge B)=I(A)\wedge I(B)$; ④ $II(A)=f^+(ff^+)f(A)\geqslant f^+f()A)=I(A)$. 由②得 $II(A)=I(A)$. 综上知 I 为 L_1^X 上的内部算子.　证完

系: $L_0^X=\{I(A):A\in L_1^X\}$是$L_1^X$上的一个拓扑.

命题2·3. 设 $f:L_1^X\to L_2^Y$ 是 $DFOH$. 则 ① $L_0^X=f^+(L_2^Y)$; ② L_0^X 是 L_1^X 的子完全分配格.

证明. ① 若 $C\in L_0^X$. 则存在 $A\in L_1^X$ 使 $C=I(A)=f^+f(A)\in f^+(L_2^Y)$. 反过来, 若 $C\in f^+(L_2^Y)$, 则存在 $B\in L_2^Y$ 使 $C=f^+(B)$. 于是 $I(C)=f^+f(C)=f^+(ff^+)(B)\geqslant f^+(B)=C$. 又 $I(C)\leqslant C$　$\therefore I(C)=C$　故 $C\in L_0^X$.

②　首先, 显然有 0, $1\in L_0^X$ 其次, $\forall A_j\in L_0^X$　$(j\in E)$ 存在 $B_j\in L_2^Y$ 使 $A_j=f^+(B_j)$ 且 $\vee B_j$、$\wedge B_j\in L_2^Y$, 由 f^+ 保交保并得

$\vee A_j=\vee f^+(B_j)=f^+(\vee B_j)\in f^+(L_2^Y)=L_0^X$

$\wedge A_j=\wedge f^+(B_j)=f^+(\wedge B_j)\in L_0^X$

故L_0^X是L_1^X的子完全分配格　证完

由命题2·1进而还有L_0是L_1的子完全分配格.

定理2·4(存在定理)

存在$DFOH$　$f:L_1^X \to L_2^Y \Leftrightarrow$存在保并保交映射$g:L_2^Y \to L_0^X$且$g(1)=1$其中$L_0$是$L_1$的某一子完全分配格

证明，必要性，由命题2·3，$L_0^X=f^+(L_2^Y)$是L_1^X的子完全分配格，L_0是L_1的子完全分配格．取$g=f^+:L_2^Y \to L_0^X$使得必要性成立．

充分性　定义映射　$f:L_1^X \to L_2^Y$使$\forall A \in L_1^X$　$f(A)=\vee\{B:g(B)\leqslant A\}$，　则$fg \geqslant i_2, gf \leqslant i_1$　由定理2·2知f是$DFOH$证完．

3、对偶$Fuzz$函数

定义3·1　设L_1、L_2为$Fuzzes$. 映射f: $L_1^X \to L_2^Y$叫$Fuzz$函数，如果$f(0)=0$ f保并且f^{-1}保余(即$f^{-1}(B')=[f^{-1}(B)]'$)　(见[1])

映射f: $L_1^X \to L_2^Y$叫对偶$Fuzz$函数、记作$D-Fuzz$函数，如果$f(1)=1$、f保交且f^+保余．

由命题1·2有

定理3·1，设L_1、L_2为$Fuzzes$，　f^-：$L_1^X \to L_2^Y$是$D-Fuzz$函数$\Leftrightarrow f^-:L_1^X \to L_2^Y$是$Fuzz$函数.

命题3·1　设L_1、L_2为$Fuzzes$,则以下二款等价①$f:L_1 \to L_2$保余；②$A \geqslant f(B) \Leftrightarrow A' \geqslant A \leqslant f(B')$

证明．当①成立时，若$A \geqslant f(B)$，则$A' \leqslant [f(B)]'=f(B')$．若$A' \leqslant f(B')$．则$A \geqslant [f(B')]'=f(B)$．当②成立时，$\forall B \in L_1$取$A=f(B)$．由$A \geqslant f(B) \Rightarrow A' \geqslant f(B')$即$[f(B)]' \leqslant f(B')$．由$A \leqslant f(B) \Rightarrow A' \geqslant f(B')$，即$[f(B)']\geqslant f(B')$．故$f(B')=[f(B)]'$即$f$保余．证完

由命题1·1、命题3、1有

命题3·2．设L_1、L_2为$Fuzzes$．$f:L_1 \to L_2$、$g:L_2 \to L_1$为映射．则以下三款等价，①$fg \geqslant i_2$、$gf \leqslant i_1$且$g=g^-$；②$f=g^{-1}$、$g=f^+=g^-$；③$f(A)\geqslant B \Leftrightarrow A \geqslant g(B) \Leftrightarrow A' \leqslant g(B')$

由命题3·2有

定理：设L_1、L_2为$Fuzzes$．映射$f:L_1^X \to L_2^Y$为$D-Fuzz$函数$\Leftrightarrow$存在映射$g:L_2^Y \to L_1^X$使下列三款之一成立.①$fg \geqslant i_2$、$gf \leqslant i_1$且$g=g^-$；②$f=g^{-1}$、$g=f^+$

$= g^{-}$;③$f(A) \geqslant B \Leftrightarrow A \geqslant g(B) \Leftrightarrow A' \leqslant g(B')$

由定理3·2及命题3·2不难证明$D-$ Fuzz函数的扩张定理及存在定理

定理3·3 设L_1、L_2为Fuzzes,L_0是L_1的子Fuzzes,$f_0:L_0^X \to L_2^Y$为$D-$ Fuzz函数．则存在$D-$ Fuzz函数$f:L_1^X \to L_2^Y$使$f|L_0^X = f_0$

定理3·4. 设L_1、L_2为Fuzzes.从L_1^X到L_2^Y有$D-$ Fuzz函数$\Leftrightarrow$从L_2^Y到L_0^X有保并保余映射．其中L_0是L_1的某一子Fuzzes。

参考文献

〔1〕 刘应明．不分明序同态的构造 Fuzzy sets and systems 2(1987) 43−51.

〔2〕 王国俊．关于序同态的若干特征定理.科学通报.30(1985) 241—243

〔3〕 赵万忠．对偶不分明序同态 河南F数学第五次年会交流文章

Dual Fuzzy Order Homomorphisms

Zhao Wanzhong

(Zheng Zhou Institue of Technology)

Abstract: In this paper, We have defined dual form of fuzzy order homomrphism and Fuzz functiom and given its characteristic theorem, extension theorem and existence theorem.

Keywords: Kual Fuzzy Order Homomrphism, Dual Fuzz Function.