

# 非稳态弹性流体动力润滑完全数值解在直齿轮传动中的应用\*

夏伯乾 牛锡传

(西安交通大学)

**摘 要:** 本文提出了一种计算非稳态弹性流体动力润滑问题的完全数值方法,并将该方法应用于直齿轮传动的弹流计算。计入啮合线上各点承载的变化、曲率半径变化、速度变化及表面伸缩效应。本文成功地获得了非稳态膜厚沿啮合线的分布。结果表明:非稳态计算结果和稳态计算结果有不少差异,非稳态计算的油膜厚度具有随油膜阻尼的突变而突变的特征。最后,本文讨论了表面伸缩效应对非稳态弹流计算的影响,证明表面伸缩效应可以忽略不计。

**关键词:** 非稳态, 弹性流体动力润滑, 数值解, 直齿圆柱齿轮。

**中图分类号:** TH117.2

齿轮,尤其是直齿轮,是工业中最基本的、应用范围最广的机械零件之一,齿轮润滑的重要性是自不待言的。现在,在齿轮传动、设计中,弹流计算越来越受到重视,我国国标中以润滑系数  $Z_L$  来体现弹流油膜对承载力的影响,这当然是十分粗糙的。美国齿轮制造者协会 AGMA 则建议把弹流油膜厚度的计算作为齿轮传动设计的一个重要组成部分。虽然经过几十年不断的努力,现在我们已有了各种工况范围内的弹流油膜最小膜厚公式并据此绘制了各种润滑状态图或油膜厚度图,但是,这些公式或图表都是在“稳态”的假定下得到的,而在实际中,这种“稳态”假定是罕见的,相反,几乎所有处于弹流润滑状态下工作的机器零部件,其润滑油膜形态都是一种随时间而变化被称之为非稳态的过程,接触区的曲率半径、表面速度、所受载荷都是随时间而变化的。齿轮啮合过程就是这样。经典“稳态”研究结果究竟在多大程度上反映了齿轮啮合过程中弹流油膜的变化?齿轮啮合过程中弹流油膜究竟是怎样的?稳态研究结果和非稳态研究结果究竟有何差异?等等,要回答这些问题,就必须抛开“稳态”的假定进行非稳态弹流研究。

---

\* 收稿日期: 1992-10-25

# 1 计入表面伸缩效应的直齿轮传动非稳态弹流计算模型

## 1.1 曲率半径

如图 1 示, 设  $t$  时刻在  $E$  点啮合, 则两啮合齿面在  $E$  点的曲率半径分别为:

$$R_1(t) = r_{b1} \tan(\varphi + \omega_1 t)$$

$$R_2(t) = (r_{b1} + r_{b2}) \tan \alpha - R_1(t)$$

则综合曲率半径

$$R(t) = \frac{R_1(t)R_2(t)}{R_1(t) + R_2(t)} \quad (1)$$

## 1.2 计入表面效应的速度分析

如图 2, 在啮合点  $C$ , 弹流计算区的速度可表示为

$$U(x, t) = \frac{U_1(x, t) + U_2(x, t)}{2} \quad (2)$$

其中

$$\begin{cases} U_i(x, t) = R_i^*(t) \omega_i, & i = 1, 2 \\ R_1^*(t) = R_1(t) \frac{1 + [(1 + r_{b1}|x|/R_1(t))^2]^{\frac{1}{2}}}{2} \\ R_2^*(t) = R_2(t) \end{cases}$$

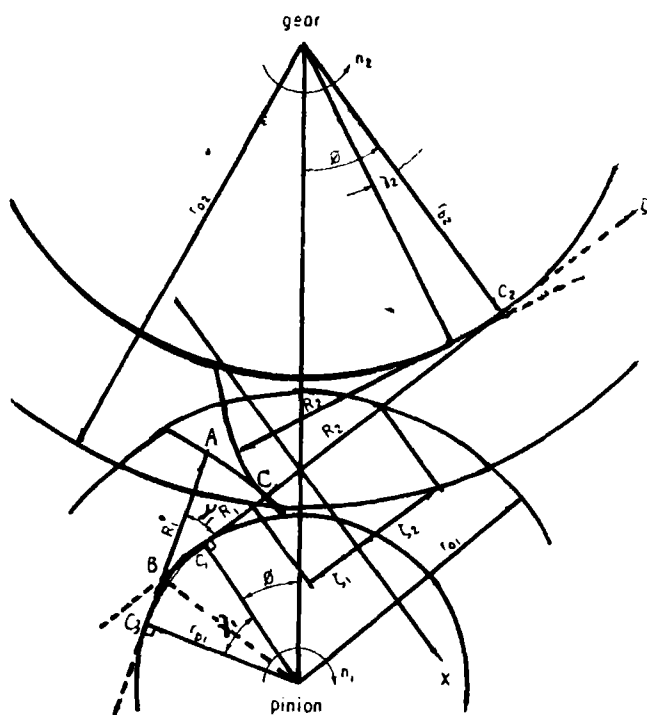


图 2

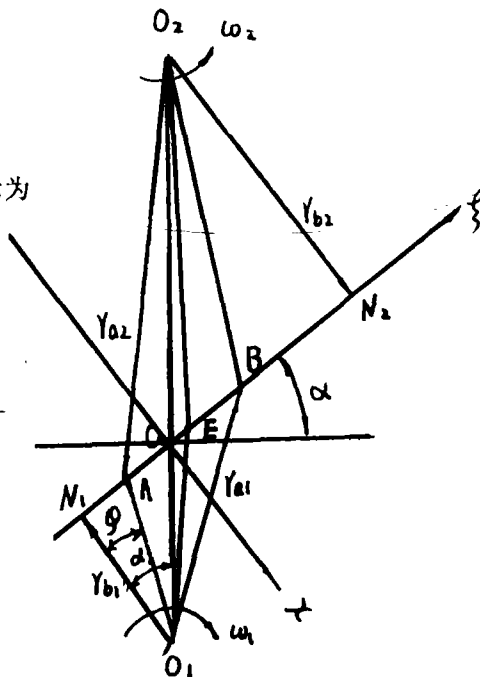


图 1

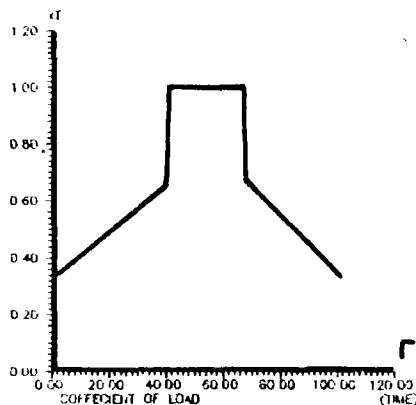


图 3

### 1.3 载荷分布

采用 ISO 推荐的计算公式, 啮合点法向载荷  $W_n(t) = W_{x_r}(t)$

$$\begin{cases} \Gamma_{B2} \leq \Gamma < \Gamma_{A1} & x_r = \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{\Gamma - \Gamma_{B2}}{\Gamma_{A1} - \Gamma_{B2}} \right] \\ \Gamma_{A1} \leq \Gamma < \Gamma_{A2} & x_r = 1 \\ \Gamma_{A2} \leq \Gamma \leq \Gamma_{B1} & x_r = \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{\Gamma_{B1} - \Gamma}{\Gamma_{B1} - \Gamma_{A2}} \right] \end{cases} \quad (3)$$

## 2 弹流问题基本方程

考虑挤压、卷吸共存的线接触非稳态弹流问题的 *Reynolds* 方程是

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 12 \frac{\partial(\rho U h)}{\partial x} + 12 \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \quad (4)$$

边界条件:  $P(t, x_{in}) = P(t, x_{out}) = \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=x_{out}} = 0$

其中润滑剂压-粘-温关系采用 *Rcoland* 公式

$$\eta(p, T) = \exp \{ [\ln(\eta_0 \times 10^3) + 2.763] (1 + 5.1 \times 10^{-9} p)^{1.2} \cdot \left( \frac{T_0 + 135}{T + 135} \right)^{S_0} - 2.763 \} / 10^3 \quad (5)$$

$$\text{其中} \quad \begin{cases} Z_p = 0.72 - 0.26 \ln(1 + \frac{T}{135}) \\ S_0 = 1.04 \sim 1.14 \end{cases}$$

润滑剂密度方程采用 *Dowson* 公式

$$\rho(P \cdot T) = \rho_0 [1 + C_A P / (1 + C_B P) - D_1 (T - T_0)] \quad (6)$$

式中  $C_A$ 、 $C_B$ 、 $D_1$  为待定常数

油膜形式表达式

$$h(x, t) = h_c(t) + \frac{x^2}{2R(t)} + \delta(x, t) - \delta(0, t) \quad (7)$$

$$\text{其中} \quad \delta(x, t) = -\frac{2}{\pi E'} \int_{x_{in}}^{x_{out}} P(s, t) \ln(s - x)^2 ds$$

载荷方程

$$W = \int_{x_{in}}^{x_{out}} P(s, t) ds \quad (8)$$

对上述方程无量纲化, 其中 *Reynolds* 方程可重写成

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \right) = 12 \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{U} H)}{\partial x} + 12 \frac{\partial(\bar{\rho} H)}{\partial t} \quad (9)$$

弹性变形、油膜厚度、载荷方程无量纲化后, 采用 *Houpert and hamrolk*[1] 方法离散后也可写成:

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}_j &= \sum_{i=1}^N D_{ij} \bar{P}_i \quad ; \quad \bar{\Delta}c = \sum_{i=1}^N D_{\mu oi} \bar{P}_i \\ H(X, \bar{t}) &= H_c(\bar{t}) + B(\bar{t})X_j^2 + \bar{\Delta}_j - \bar{\Delta}c \\ \bar{W} &= \sum_{i=1}^N C_i \bar{P}_i\end{aligned}$$

### 3 Reynolds方程的离散及迭代格式

#### 3.1 Reynolds方程的离散

令  $\frac{\bar{P}H^3}{\bar{\eta}} = \bar{r}$  则式(9)可写成

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{Y} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \right) = 12 \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{U} H)}{\partial x} + 12 \frac{\partial (\bar{\rho} H)}{\partial \bar{t}} \quad (10)$$

将式(10)按求导法则展开, 我们得到

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial x} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \bar{Y} \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial x^2} = 12 \bar{U} H \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial P} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + 12 \bar{P} H \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + 12 \bar{\rho} \bar{U} \frac{\partial H}{\partial x} + 12 H \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{t}} + 12 \bar{\rho} \frac{\partial H}{\partial \bar{t}} \quad (11)$$

记  $\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial P} = \bar{\lambda}$ , 将式(11)按差分形式离散, 并将有关压项  $\bar{P}_j^{n+1}$  项移到方程左力, 将中心膜

厚  $H_j^{n+1}$  移至方程右边, 整理之后我们得到:

$$\begin{aligned}& \frac{2\bar{Y}_{j+1}^{n+1} + 12\bar{U}_j^{n+1} H_j^{n+1} \bar{\lambda}_j^{n+1}}{\Delta X_j (\Delta X_j + \Delta X_{j-1})} \bar{P}_{j-1}^{n+1} \\& - \left\{ \frac{2(\frac{\bar{Y}_j^{n+1}}{\Delta X_j} + \frac{\bar{Y}_{j-1}^{n+1}}{\Delta X_{j-1}}) + 12\bar{U}_j^{n+1} H_j^{n+1} \bar{\lambda}_j^{n+1} (\frac{\Delta X_j}{\Delta X_{j-1}} - \frac{\Delta X_{j-1}}{\Delta X_j})}{\Delta X_j + \Delta X_{j-1}} \right. \\& \left. + 12 \frac{\bar{H}_j^{n+1} \bar{\lambda}_j^{n+1}}{\Delta \bar{t}} \right\} \bar{P}_j^{n+1} + \frac{2(\bar{Y}_j^{n+1} - 12\bar{U}_j^{n+1} H_j^{n+1} \bar{\lambda}_j^{n+1} \Delta X_{j-1})}{\Delta X_j (\Delta X_j + \Delta X_{j-1})} \bar{P}_{j+1}^{n+1} - \\& \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{12\bar{P}_j^{n+1} \bar{U}_j^{n+1}}{\Delta X_j + \Delta X_{j-1}} \left[ \frac{\Delta X_{j-1}}{\Delta X_j} (D_{j+1,k} - D_{j,k}) + \frac{\Delta X_j}{\Delta X_{j-1}} (D_{j,k} - D_{j-1,k}) \right] \right. \\& \left. + \frac{12\bar{\rho}_j^{n+1}}{\Delta \bar{t}} D_{j,k} \right\} \bar{P}_k^{n+1} = \frac{12\bar{\rho}_j^{n+1} H_j^{n+1}}{\Delta X_j + \Delta X_{j-1}} \left[ \frac{\Delta X_{j-1}}{\Delta X_j} (\bar{U}_{j+1}^{n+1} - \bar{U}_j^{n+1}) + \frac{\Delta X_j}{\Delta X_{j-1}} \right] (\bar{U}_j^{n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -U_{j-1}^{n+1}] + 24\bar{p}_j^{n+1}\bar{U}_j^{n+1} \cdot B^{n+1}X_j - 12H_j^n\bar{\lambda}_j^n\frac{\bar{P}_j^n}{\Delta t} + 12\bar{p}_j^{n+1}\left[\frac{H_c^{n+1} - H_c^n}{\Delta t}\right. \\
 & \left. + \bar{B}^{n+1}X_j^2 + \frac{\bar{\Delta}_c^n - \bar{\Delta}_c^{n+1} - \bar{\Delta}_j^n}{\Delta t}\right] \quad j=2,3,\dots,N_{out}-1 \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\text{其中 } Y_j^{n+1} = \frac{\bar{P}_{j+2}^{n+1}(H_{j+2}^{n+1})^3}{\bar{\eta}_{j+2}^{n+1}} \quad ; \quad \bar{P}_{j+2}^{n+1} = \frac{1}{2}(\bar{P}_j^{n+1} + \bar{P}_{j+1}^{n+1})$$

$$H_{j+2}^{n+1} = \frac{1}{2}(H_j^{n+1} + H_{j+1}^{n+1}) \quad ; \quad \Delta X_j = X_{j+1} - X_j$$

式(12)中, 上标  $n, n+1$  表示时间轴上先后的序号, 时间轴上的离散采用的是隐式格式即关于时间的一阶导数采用后退的 *Euler's* 差分形式.

### 3.2 迭代格式

以式(12)为基础形成线性方程组, 以  $\bar{P}_j^{n+1}$  为未知量, 以迭代循环次数  $S$  代替左端待求量时间上标  $n$ , 采用下列直接迭代格式

$$\left. \begin{aligned} A^{s-1}P^3 &= B^{s-1} \\ \bar{P}^s &= \bar{p}^{s-1} + \lambda(P^s - \bar{P}^{s-1}) \\ \bar{P} &= (\bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_{s-1})^T \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其中  $\lambda$  为松弛因子

### 3.3 数值计算过程 见图4

## 4 计算结果及分析

### 4.1 稳态工况计算

右图是稳态工况时的一个算例(不考虑表面伸缩效应). 工况是  $R=15\text{mm}$ ,  $W=70\text{N/m}$ ,  $U=2.3\text{m/s}$ .

### 4.2 法向纯挤压工况非稳态弹流计算

通常非稳态弹流研究, 都是从法向纯挤压这种典型工况开始, 这是一种非稳态效应非常明显的重要工况, 研究这种工况的非稳态弹流具有重要的理论意义, 从中可以观察到非稳态油膜随时间的演变过程和特征.

图6是一种法向纯挤压工况下的非稳态弹流计算结果. 工况是  $R=17\text{mm}$ ,  $w=50\text{N/mm}$ ,

$$U = \begin{cases} 300\text{mm/s} & t=1 \\ 0 & t=2,3,\dots \end{cases}, \quad \Delta t = 2.077 \times 10^{-4}\text{s}$$

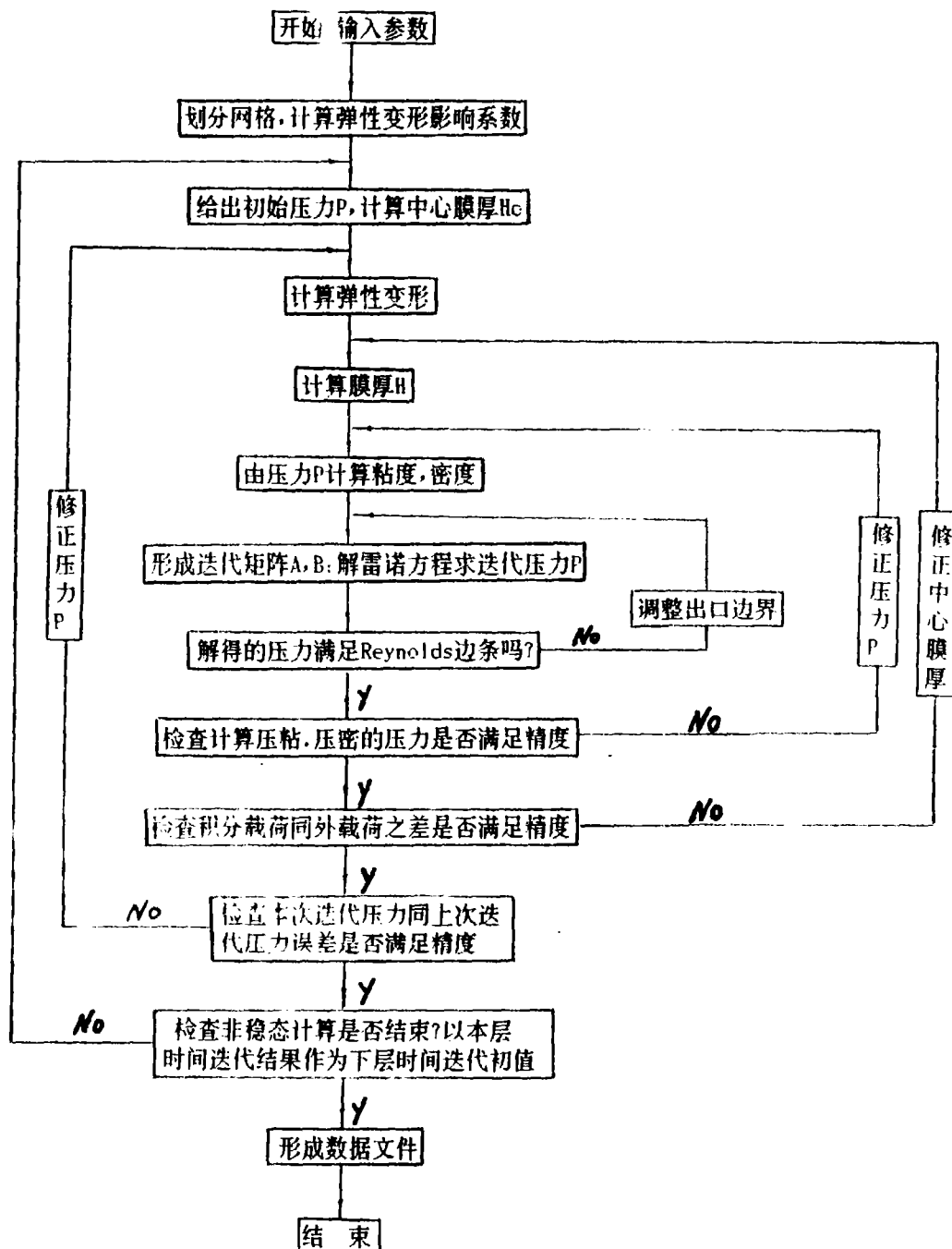


图 4

从图6中, 我们可以清楚地看到非稳态纯挤压过程中动态油膜的典型特征即油膜中心凹陷随时间的演变过程。这也证明本文方法的正确性。

#### 4.3 直齿轮传动非稳态弹流计算

工况是: 齿数  $Z_1 = Z_2 = 22$

模数  $m = 6$

压力角  $\alpha = 20$

齿顶高系数  $h^* = 1$

齿宽  $B = 20\text{mm}$

转速  $n_1 = 1000\text{rpm}$

传递功率  $p = 10\text{kW}$

标准安装

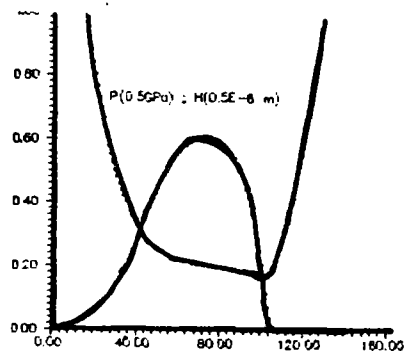


图5

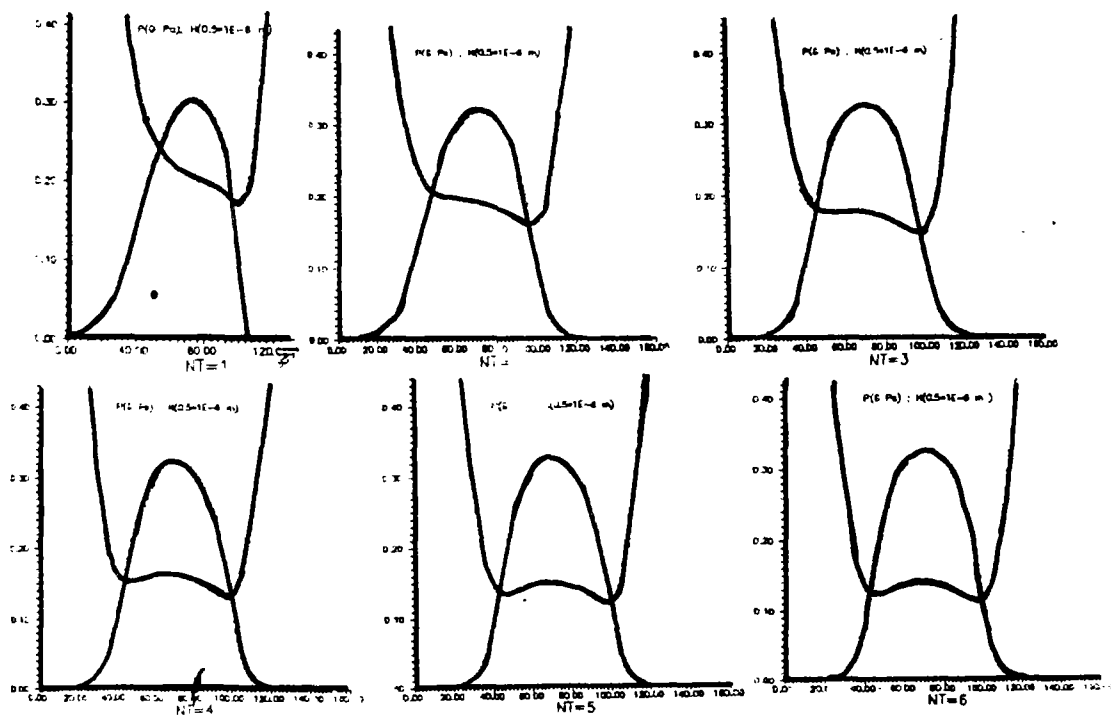


图6 (不考虑表面伸缩效应)

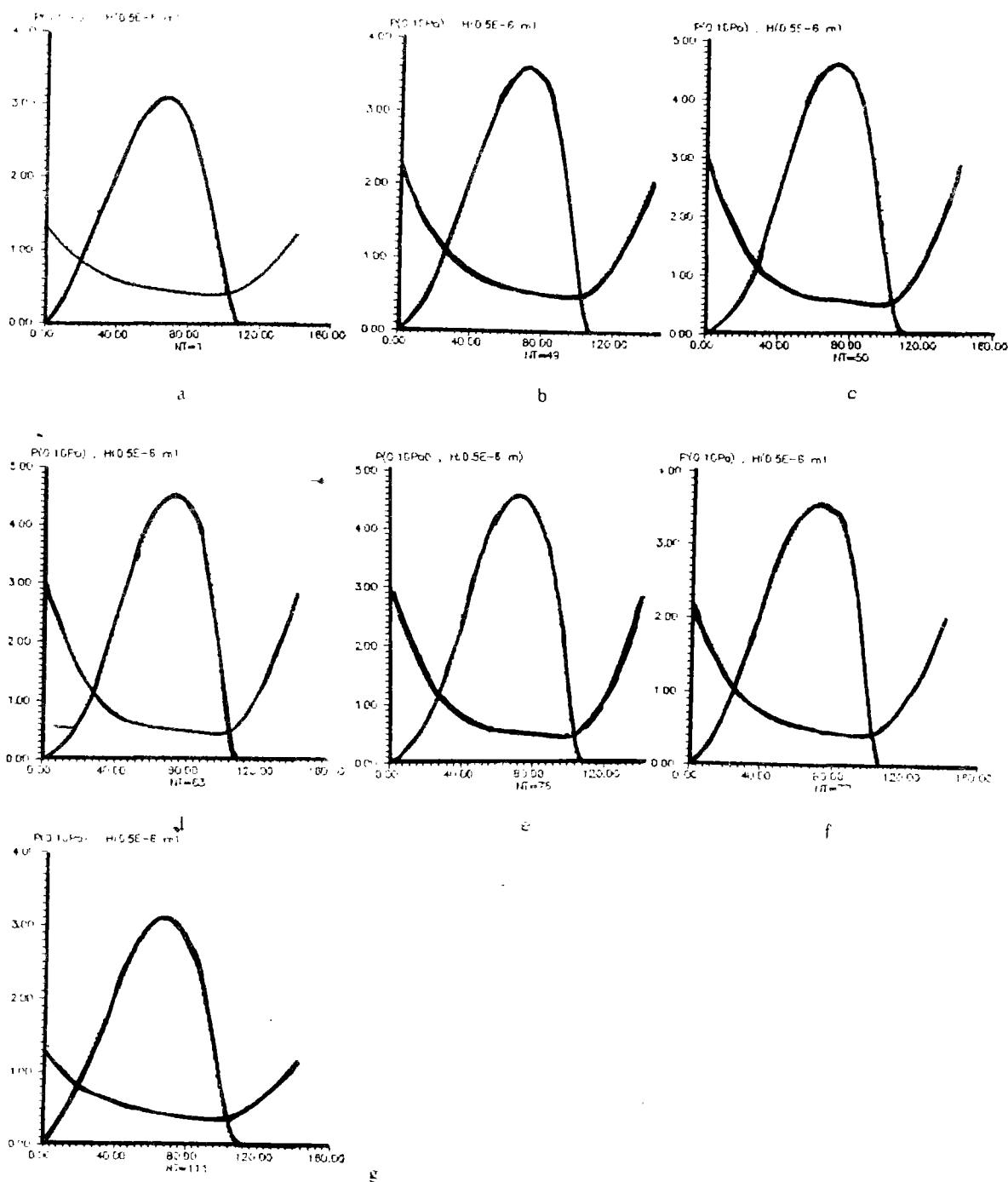


图 7

图 7 是齿轮传动过程中在啮合点 A、B、B<sup>+</sup>、P、C<sub>-</sub>、C<sup>+</sup>、D 的压力、膜厚分布图。

我们看到：齿轮传动过程中非稳态油膜在各个时刻的分布并无如图 6 所示的中心凹陷现象，这是因为图 6 所示的工况是纯挤压，而齿轮传动是卷吸、挤压共存，卷吸速度的存



在大大掩饰了挤压效应对油膜形态的影响。

图 8 是我们利用 (1) 中的模型得到的齿轮啮合过程中整个啮合线上非稳态油膜厚度分布图。

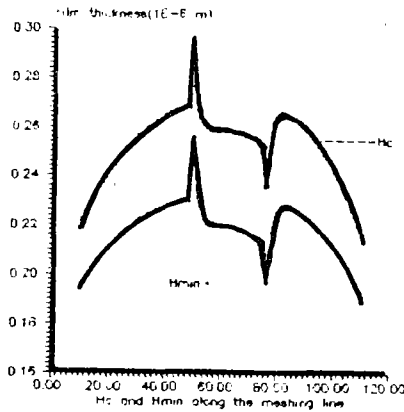


图 8

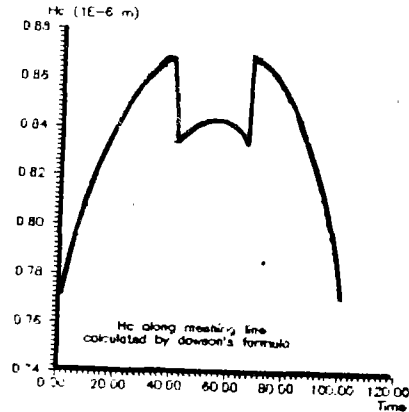


图 9

图 9 是按 Dowson 公式  $h_c = 3.06 \cdot R \cdot (\eta_0 U / E' R)^{0.64} (\alpha E')^{0.56} \cdot (W / E' R)^{-0.1}$  计算的啮合线上稳态油膜厚度分布图

比较图 8 和图 9, 我们看到, 在由两对齿啮合区进入一对齿啮合区的瞬时及以后的一段时间内和由一对齿啮合区进入两对齿啮合区的瞬时及以后的一段时间内, 两图具有明显的不同。在图 9 上, 从  $B^-$  点到  $B^+$  点,  $h_c$  突然下降, 运用 Dowson 公式很容易得到解释, 但在图 8 上, 从  $B^-$  点到  $B^+$  点,  $h_c$  值不但没减小, 反而突然增大了许多, 这是因为在  $B^+$  点,  $W$  突然增大, 两当量圆柱体之间法向挤压突然增强, 油膜的粘性阻尼作用, 使得非稳态油膜厚度不但没减小, 反而较稳态值增大了许多, 过了  $B^+$  点以后, 由于  $W$  值不再变化,  $R$  变化又小, 当量圆柱体之间法向挤压作用减弱, 油膜的阻尼作用减小, 所以  $h_c$  渐渐趋于平稳。而在  $C^+$  点, 情况正好与  $B^+$  点相反, 从  $C^-$  到  $C^+$ ,  $W$  值突然下降, 相当于两当量圆柱体之间有法向分离的趋势, 所以非稳态  $h$  突然减小, 之后由于  $W$  值又没有了突变,  $R$  又起主导作用,  $h_c$  也慢慢回升趋向稳态情况。

由上分析, 可以肯定: 由两对齿啮合向一对齿啮合 (或相反) 过渡时, 由于载荷的突变, 使非稳态油膜厚度产生突变是齿轮啮合在非稳态工况下的特征。

图 8 和图 9 的另一个不同点是图 9 关于节点 P 对称, 而图 8 则不然, 不仅  $B^+$  点及以后的一些点与  $C^-$  点及以后的一些点不关于 P 对称, 而且 AB 段和 CD 段也不关于 P 对称, AB 段  $h$  大于 CD 段  $h$ , 这是因为在 AB 段,  $R$ 、 $W$  都单调增, 相当于两圆柱体之间一直有渐渐增强的法向挤压作用, 而在 CD 段,  $R$ 、 $W$  都是单调降, 相当于两圆柱体之间一直有法向他离的趋势, 油膜的阻尼作用, 使 AB 段  $h$  大于 CD 段  $h$ 。

## 4 关于表面伸缩效应

比较图 5 和图 7-a, 我们并不能从中看出二者之间有什么差别, 我们在计算中也没有感到考虑表面效应与否对收敛性有什么影响。

让我们再看下图

图 10 是计算区域内

$|\bar{U}_j - \bar{U}_{j+1}|$  的分布图 11 是  $|\bar{U}_j - \bar{U}_{j+1}|$  的分布图, 我们看到它们的最大值都在  $10^{-10}$  数量级, 在计算区域内, 速度沿  $x$  方向变化如此微小, 对计算是不会有影响的。表面伸缩效应只有在非稳态工况下才存在, 由于对齿轮的润滑特性无显著影响, 故在以后的研究中可略去不计。

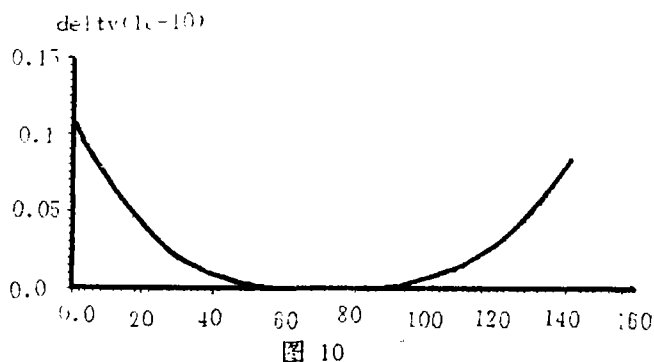


图 10

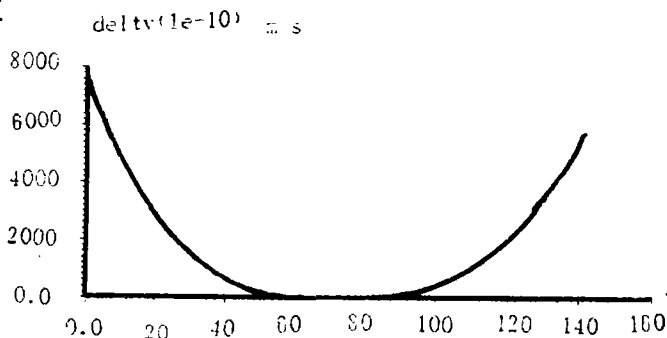


图 11

## 5 小 结

5.1 本文提出的用于计算非稳态弹流问题的直接迭代法是成功的, 具有编程方便、收敛速度快、收敛精度高的优点。

5.2 在非稳态纯挤压工况下, 油膜形状具有随时间的延续渐渐脱起的特征, 而齿轮传动各瞬间的油膜形状不具有这种特征, 说明卷吸、挤压共存时, 卷吸作用将大大掩饰挤压项对油膜形状的影响。

5.3 将非稳态 EHL 理论应用于齿轮传动, 可以明显地观察到油膜的阻尼作用, 这是稳态 EHL 理论所不能体现的。

5.4 油膜的阻尼作用, 使得啮合线上的非稳态油膜具有随载荷突变而突变的特征。

5.5 由于  $C^+$  点油膜突然减小, 润滑突然恶化, 所以  $C^+$  点更易产生胶合、磨损损坏。

5.6 在非稳态研究中, 表面伸缩效应可忽略不计。

## 参 考 文 献

- (1) L.G.Houpert, B.J.Hanrock. J.of Tri ASME. 1986 vol.108 P411~P420
- (2) D.Dowson & S.Toyoda. Proc. 5th Leeds-Lyonsymposium on Trivology. 1978. P60~P65
- (3) Z.G.Lin & J.B.Malley. wear. 95(1984) P143~163

- (4) Ai XiaoLan & Yu HaiQing. wear. 121(1988) P143~P159
- (5) 梅雪松, 西安交大博士论文. 1991 P7~P14
- (6) 夏伯乾. 西安交大硕士论文. 1992.5

## Application of full Numerical Solution for Transient Elastohydro dynamic Lubrication on Involute Spur Gear Driving

Xia Bo Qian

Niu XiChuan

(Xian Jiaotong University)

**Abstract:** In this paper, A full numerical algorithm for solving transient elastohydrodynamic lubrication problem has been developed. Using the algorithm on elastohydrodynamic lubrication in involute spur gears meshing and considering load, surface curvature radius, surface velocity which are time dependent and surface extension-contraction effect, the distribution of dynamic oil film thickness along the meshing line was obtained. The result showed that there are some few difference between transient calculation and steady state calculation, transient oil film thickness has the character that changing suddenly with oil damping changing suddenly.

In the last, we discussed the influence of surface extension-contraction to elastohydrodynamic lubrication calculation, and confirmed the surface extension-contraction can be ignored because which influence is very little.

**Keywords:** Transients; EHL; Numerical solution; Spur gears