第14卷 第4期　　郑州工学院学报　　Vol.14 No.4
1993年 12 月　　Journal of Zhengzhou Institute of Technology　　Dec. 1993

一类推广的 Brenstien 算子及其性质

赵玉莹

(郑州工学院数力系)

摘　要: 本文证明了一类推广的*Brenstein* 算子在一定条件下的单调性及收敛性，进而讨论了算子序列的收敛问题。

关键词: 一致范数，收敛，单调算子

中图分类号: O175

在讨论用多项式逼近一个定义于闭区间[a, b]上的连续函数 f 的问题中，著名的 Brenstein 多项式在一致范数意义下对所有 $f\in C[0,1]$收敛：$B_nf\to f$。本文讨论了一类推广的 Brenstien 算子的单调性和收敛性，并进一步讨论了算子序列的收敛问题。

1　多项式算子

首先，定义多项式

$$(L_nf)(x)=(1-x)^{-n}[h_n(\frac{x}{1-x})]^{-1}\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})a_{nk}x^k(1-x)^{n-k} \tag{1}$$

其中　$h_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_{nk}x^k$，$f\in C[0,1]$。

由$(1-x)^nh_n(\frac{x}{1-x})=\sum_{k=0}^{n}a_{nk}x^k(1-x)^{n-k}$

则当 $a_{nk}=\binom{n}{k}$ 时，上式为$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1$ 这时 (1) 式 $(L_nf)(x)=\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$，这就是 *Brenstien* 多项式。

显然 (1) 式定义的算子 L_n 是线性算子。为讨论算子 L_n 的性质先给出两个引理。

收稿日期：1992-6-22

2 引理

对于一个线性算子 L，显然它作用在零函数上结果恒等于零。即 LO＝0。

定义　如果 f≥0，有 Lf≥0，则称 C[a，b]上算了 L 是非负的。

对于线性算子可以证明，

引理 1　线性算子的非负性和单调性是等价的。

引理2　形如$(Lf)(x)=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)g_i(x)$的一个算子，其中$a\leqslant x_1\leqslant x_2\cdots\leqslant x_n=b$，且$g_i\in C[a,b]$则$L$是单调算子的充要条件是对所有的$x\in[a,b]$和所有的$i$，都有$g_i(x)\geqslant 0$。

证明　充分性，设$f\geqslant h\geqslant 0$，$x\in[a,b]$，则由$g_i(x)\geqslant 0$，知$L(f-h)\geqslant 0$，即L是单调算子。

用反证法必要性．若不然，当 L 是单调算子时，存在 $x_o\in[a,b]$ 及某一 i_o，有 $g_{io}(x_o)<0$。

设

$$f_o(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i_o-1}}{X_{io}-x_{io-1}} & 当\quad x\in[x_{i_o-1},\ x_{io}]\\[2ex] \dfrac{x-x_{i_o+1}}{x_{io}-x_{i_o+1}} & 当\quad x\in[x_{io},\ x_{io+1}]\\[2ex] 0 & 当\quad x\in[a,b]\setminus[x_{io-1},\ x_{io+1}]\end{cases}$$

显然，$f_o\in C[a,b]$，且对 $x\in[a,b]$，$f_o(x)\geqslant 0$ 而 $(Lf_o)(x_o)=g_{io}(x_o)<0$，则 L 不是非负算子，由引理 1，算子 L 不单调。矛盾。

证毕。

3 算子 L_n 的性质定理

对于由（1）式定义的算子，我们给出性质定理。

定理 1　当 a_{nk} 恒为正（或恒为负）时，L_n 是单调算子。

证明：

$$(L_nf)(x)=\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})\frac{a_{nk}x^k(1-x)^{n-k}}{\sum_{k=0}^{n}a_{ni}x^i(1-x)^{n-i}}\qquad x\in[0,1]$$

记 $$g_k(x)=\frac{a_{nk}x^k(1-x)^{n-k}}{\sum\limits_{k=0}^{n}a_{ni}x^i(1-x)^{n-i}} \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots n) \qquad x\in[0,1]$$

由于a_{nk}恒号，所以$g_k(x)\geqslant 0$。由引理2，L_n则是单调算子。

定理2 当$a_{nk}=C\binom{n}{k}+\alpha$，其中$C$是非零常数，$\alpha=o(1)$ $(n\to\infty)$，则对任意的$f\in C[0,1]$均有$L_nf\to f$ $(n\to\infty)$。

证明： $$(L_nf)(x)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})[C\binom{n}{k}+\alpha]x^k(1-x)^{n-k}}{\sum\limits_{k=0}^{n}[C\binom{n}{k}+\alpha]x^k(1-x)^{n-k}}$$

记 $$Q_1(x)=\alpha\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})x^k(1-x)^{n-k}$$

$$Q_2(x)=\alpha\sum_{k=0}^{n}x^k(1-x)^{n-k}$$

则 $$(L_nf)(x)=\frac{CB_nf+Q_1(x)}{C+Q_2(x)}$$

当$n\to\infty$，$x\in[0,1]$时，$|R_1(x)|\leqslant\|f\|\cdot|\alpha|\to 0$，$|R_2(x)|\leqslant|\alpha|\to 0$，$B_nf\to f$，所以$L_nf\to f$ $(n\to\infty)$

定理3 $\|L_nf\|\leqslant\|f\|$

证明 $$\|L_nf\|=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})a_{nk}x^k(1-x)^{n-k}}{\sum\limits_{o=0}^{n}a_{ni}x^i(1-x)^{n-i}}\right|$$

$$\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|\cdot\left|\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}a_{nk}x^k(1-x)^{n-k}}{\sum\limits_{o=0}^{n}a_{ni}x^i(1-x)^{n-i}}\right|=\|f\|$$

4 算子序列的收敛性

对一个给定的f，构造算子序列L_nf，$L_n^2f=L_n(L_nf)$，$L_n^3f=L_n(L_n^2f)$，$\cdots L_n^kf=L_n(L_n^{k-1}f)\cdots$。下面我们证明，对固定的$k$，算子序列$L_n^kf$当$n\to\infty$时，在一致范数意义下是收敛的。即

定理4 $L_n^kf\to f$ $(n\to\infty)$。其中k是固定常数

证明：因为$\|L_n^k f-f\| \leqslant \|L_n^k f-L_n^{k-1}f\|+\|L_n^{k-1}f-L_n^{k-2}f\|+\cdots+\|L_n f-f\|$

而　$\|L_n^2 f-L_n f\|=\|L_n(L_n f)-L_n f\|=\|L_n(L_n f-f)\| \leqslant \|L_n f-f\|$　　（由定理3）

$$\|L_n^3 f-L_n^2 f\|=\|L_n(L_2 n\quad f-L_n f\| \leqslant \|L_n^2 f-L_n f\| \leqslant L_n f-f\|$$

同理可证　$\|L_n^k f-L_n^{k-1}f\| \leqslant \|L_n f-f\|$

所以$\|L_n^k f-f\| \leqslant K\|L_n f-f\|$

在定理2条件下　$\|L_n f-f\| \to 0$　　$(n\to\infty)$

所以　$\|L_n^k f-f\| \to 0$，　即$L_n^k f \to f$　$(n\to\infty)$

证毕。

参　考　文　献

〔1〕 邓建中等. 计算方法. 西安交通大学出版社. 1985
〔2〕 E. W. 切尼. 逼近论导引. 上海科学技术出版社. 1981
〔3〕 P.L.Putzer R.J. Nessel. FOURIER 分析与逼近论. 高等教育出版社. 1985

The popularized Brenstein operator and its properties

Zhao Yuying
(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: This paper prove that the popularized Brenstien operator is monotone and convergence. In addition, the convergerce of the operator sequece is given.

Keywords: uniform norm, convergence, monotone operator