动态子结构方法在弹性连接系统中的应用*

苗同臣　王 伟

(郑州工学院数力系)

摘 要: 本文讨论了弹性连接在动态子结构方法中的影响，得到了在此条件下的动力方程。这将使动态子结构方法在研究复杂结构的动特性、动力响应及动力修改中得到更广泛的应用。

关键词: 动态子结构，模态，动力分析，弹性连接

中图分类号: TU31

子结构方法已经在现代工程结构的静、动力分析中得到普遍应用。它的基本思想是将结构划分为若干个子结构，先对这些子结构进行局部分析，然后综合组装再做整体分析。子结构模态综合法是用子结构法对结构进行动力分析的有效方法，它不仅能够大幅度降低动力方程的阶数，而且能基本上保证降阶后的精度。因此，动态子结构方法越来越显示出它在动力分析中的实用价值。

一个结构系统中有时需要用一根弹簧、连接杆件或连接板条等把两个部件连接起来(例如汽车的车身与拖车之间就属于这种连接)，这时连接弹簧将对整体系统的静动态特性产生影响。本文着重讨论了弹性连接在动态子结构方法中的影响，得到了在此种条件下的动力方程。

1 固定界面子结构模态综合法

固定界面子结构法是动态子结构方法之一，这种方法的特点是在求解子结构的主模态时，假定子结构的界面坐标固定，即有附加约束。下面介绍这种方法的基本思想和求解步骤。

设所分析的实际结构划分为 N 个子结构。

1.1 建立各子结构的刚度阵和质量阵:

* 收稿日期: 1992-03-03

$$[K]^i=\begin{bmatrix} K_{II} & K_{IB} \\ K_{BI} & K_{BB} \end{bmatrix}^i \quad , \ [M]^i=\begin{bmatrix} M_{II} & M_{IB} \\ M_{BI} & M_{BB} \end{bmatrix}^i$$

$(i=1, \ 2, \ \cdots, \ N)$

其中：I 表示子结构的内部，B 表示子结构的界面。

由此得到各子结构的动力方程：

$$[K]^i\{u\}^i+[M]^i\{u\}^i=\{F\}^i \tag{1}$$

这里：$\{u\}^i=\begin{Bmatrix} u_I \\ u_B \end{Bmatrix}^i=\begin{Bmatrix} \mu_I \\ \mu_B \end{Bmatrix}^i cos\omega t$

$$\{F\}^i=\begin{Bmatrix} 0 \\ F_B \end{Bmatrix}^i=\begin{Bmatrix} 0 \\ f_B \end{Bmatrix}^i cos\omega t$$

则(1)式可写成下列形式(省略字母 i)：

$$\begin{bmatrix} K_{II} & K_{IB} \\ K_{BI} & K_{BB} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mu_I \\ \mu_B \end{Bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix} M_{II} & M_{IB} \\ M_{BI} & M_{BB} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mu_I \\ \mu_B \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ f_B \end{Bmatrix} \tag{2}$$

1.2 对各子结构间的界面施加附加约束

这时有：$\{\mu_B\}=\{0\}$ (3)

代入(2)式可得：

$$[K_{II}]-\omega^2[M_{II}]=\{0\} \tag{4}$$

由此式可求出子结构的模态，称为主模态。

1.3 对$\{\mu\}$作模态坐标变换：

$$\{\mu_I\}=[\Phi]\{q\}=[\Phi_d \quad \Phi_g]\begin{Bmatrix} q_d \\ q_g \end{Bmatrix} \tag{5}$$

这里：$[\Phi_d]$为子结构的低阶保留主模态，由(4)式求得；$[\Phi_g]$为高阶剩余模态。

一般的分析都忽略了$[\Phi_g]$的影响，这将造成较大的误差。下面用子结构的静响应来代替$[\Phi_g]$的实际贡献（这是由于当子结构的固有频率较高时，它对系统响应的贡献趋近于静态响应)。

1.4 计算剩余约束模态

先引入约束模态的概念：依次释放子结构的界面约束，使界面位移$\{\mu_B\}$分别等于 1，其它附加约束不变，在无外力作用下，子结构产生的一系列分支静位移模态称为约束模态。

由(2)式可求出约束模态为：

$$[\Phi_{IB}]=-[K_{II}]^{-1}[K_{IB}] \tag{6}$$

而$[\Phi_{IB}]$中还包含有低阶模态的影响，必须把它消除掉，则引入下面的剩余约束模态$[\Psi_{IB}]$：

$$[\Psi_{IB}]=[\Phi_{IB}]-[\Phi_d]\{q_d\} \tag{7}$$

上式两边左乘 $[\Phi_d]^T[M_{II}]$，且利用低阶保留模态的正交归一性，以及低阶模态和高阶模态的正交性可求得:

$$\{q_d\}=[\Phi_d]^T[M_{II}][\Phi_{IB}] \tag{8}$$

代入（7）式得:

$$[\Psi_{IB}]=([I]-[\Phi_d][\Phi_d]^T[M_{II}])[\Phi_{IB}] \tag{9}$$

1.5 求模态转换矩阵

用 $[\Psi_{IB}]$ 代替 $[\Phi_g]$ 的影响，将(9)式代入(5)得:

$$\{\mu_I\}=[\Phi_d \quad \Psi_{IB}]\{q_d \quad q_g\}^T$$

即:
$$\begin{Bmatrix}\mu_I\\ \mu_B\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[\Phi_d] & [\Psi_{IB}]\\ [0] & [I]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_d\\ q_g\end{Bmatrix} \tag{10}$$

令:
$$[T]=\begin{bmatrix}[\Phi_d] & [\Psi_{IB}]\\ [0] & [I]\end{bmatrix} \tag{11}$$

$[T]$称为模态转换矩阵。则（10）可写为:

$$\{\mu\}=[T]\{q\} \tag{12}$$

这样就把物理坐标 $\{\mu\}$ 转换成了模态坐标 $\{q\}$，并且实现了方程的降阶。

1.6 对子结构的动力方程进行模态转换

将(12)式代入(2)式，且左乘 $[T]^T$ 得:

$$[\tilde{K}]\begin{Bmatrix}q_d\\ q_g\end{Bmatrix}-\omega^2[\tilde{M}]\begin{Bmatrix}q_d\\ q_g\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ f_B\end{Bmatrix} \tag{13}$$

其中:
$$[\tilde{K}]=[T]^T[K][T]=\begin{bmatrix}\tilde{K}_{II} & \tilde{K}_{IB}\\ \tilde{K}_{BI} & \tilde{K}_{BB}\end{bmatrix} \tag{14}$$

$$[\tilde{M}]=[T]^T[M][T]=\begin{bmatrix}\tilde{M}_{II} & \tilde{M}_{IB}\\ \tilde{M}_{BI} & \tilde{K}_{BB}\end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned}[][\tilde{K}_{II}] &= \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega_d^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \\ [\tilde{K}_{IB}] &= [\Phi_d]^T[K_{IB}] \\ [\tilde{K}_{BI}] &= [K_{BI}][\Phi_d] = [\tilde{K}_{IB}]^T \\ [\tilde{K}_{BB}] &= ([\Psi_{IB}]^T[K_{II}] + [K_{BI}])[\Psi_{IB}] + [\Psi_{IB}]^T[K_{IB}] + [K_{BB}] \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned}[][\tilde{M}_{II}] &= [I] \\ [\tilde{M}_{IB}] &= [\Phi_d]^T[M_{IB}] = [\tilde{M}_{BI}]^T \\ [\hat{M}_{BB}] &= ([\Psi_{IB}]^T[M_{II}] + [M_{BI}])[\Psi_{IB}] + [\Psi_{IB}]^T[M_{IB}] + [M_{BB}] \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

1.7 根据界面连续条件组集整体动力方程

下面以两个子结构α、β为例，说明组集过程。设这两个子结构的动力方程为:

$$[\tilde{K}]^\alpha\{q\}^\alpha - \omega^2[\tilde{M}]^\alpha\{q\}^\alpha = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_B \end{Bmatrix}^\alpha \tag{18}$$

$$[\tilde{K}]^\beta\{q\}^{\alpha\beta} - \omega^2[\tilde{M}]^\beta\{q\}^\beta = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_B \end{Bmatrix}^\beta \tag{19}$$

根据界面连续条件:

$$\{\mu_B\}^\alpha = \{\mu_B\}^\beta \tag{20}$$

和界面力的对接条件:

$$\{f_B\}^\alpha + \{f_B\}^\beta = \{0\} \tag{21}$$

对（18）和（19）式进行综合得:

$$[\bar{K}]\begin{Bmatrix} q_\alpha \\ q_\beta \\ \mu_B \end{Bmatrix} - \omega^2[\bar{M}]\begin{Bmatrix} q_\alpha \\ q_\beta \\ \mu_B \end{Bmatrix} = \{0\} \tag{22}$$

其中
$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} [\tilde{K}^\alpha_{II}] & & [\tilde{K}^\alpha_{IB}] \\ & [\tilde{K}^\beta_{II}] & [\tilde{K}^\beta_{IB}] \\ \text{对称} & & [\tilde{K}^\alpha_{BB}] + [\tilde{K}^\beta_{BB}] \end{bmatrix}$$

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} [I] & & [\tilde{M}^\alpha_{IB}] \\ & [I] & [\tilde{M}^\beta_{IB}] \\ \text{对称} & & [\tilde{M}^\alpha_{BB}] + [\tilde{M}^\beta_{BB}] \end{bmatrix}$$

同理对N个子结构进行组集可得到下面的动力方程:

$$[\bar{K}]\begin{Bmatrix} q \\ \mu_B \end{Bmatrix} - \omega^2[\bar{M}]\begin{Bmatrix} q \\ \mu_B \end{Bmatrix} = \{0\} \tag{23}$$

这里:

$$[\bar{K}] = \left[\begin{array}{cccc:c} [\tilde{\bar{K}}_{II}] & & & & [\tilde{\bar{K}}_{IB}] \\ & [\tilde{\bar{K}}^2_{II}] & & & [\tilde{\bar{K}}^2_{IB}] \\ \text{对} & & & [\tilde{\bar{K}}^N_{II}] & [\tilde{\bar{K}}^N_{IB}] \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ & \text{称} & & \cdots & [\sum_{i=1}^{N}[\tilde{\bar{K}}^i_{BB}] \end{array}\right] \tag{24}$$

$$[\bar{M}] = \left[\begin{array}{cccc:c} [I]^1 & & & & [\bar{M}_{IB}] \\ & [I]^2 & & & [\bar{K}^2_{IB}] \\ \text{对} & & & [I]^N & [\bar{M}^N_{IB}] \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ & \text{称} & & & [\sum_{i=1}^{N}[\bar{M}^i_{BB}] \end{array}\right] \tag{25}$$

$$\begin{Bmatrix} q \\ \mu_B \end{Bmatrix} = \{q^1 \;\; q^2 \;\; \cdots q^N, \vdots\, \mu_B\}^T \tag{26}$$

其中: $\{\mu_B\}$是所有子结构的界面位移向量。

这样就得到了整体结构的低阶动力学方程(23), 方程阶数为:

$$n = n_B + \sum_{i=1}^{N} n_I$$

其中: n_B 为各子结构之间界面的全部自由度, n_I 为各子结构的保留低阶主模态数。

1.8 系统的特征值与特征向量

由式(23)可求得整体结构的特征值与特征向量, 这时的特征向量用模态坐标{q}和$\{\mu_B\}$表示, 还要将{q}还原到物理坐标$\{\mu_I\}$。

由(10)式得到第 i 个子结构的特征向量为:

$$\{\mu_I\}^i = [\Phi_d]^i\{q_I\}^i + [\Phi_{IB}]^i\{\mu_B\}^i \tag{27}$$

所以用物理坐标表示的特征向量为:

$$\{\Phi\} = \{\{\mu_I^1\}^T\{\mu_I^2\}^T\cdots\{\mu_I^N\}^T, \;\{\mu_B\}^T\}^T \tag{28}$$

这里的$\{\mu_B\}$是把所有界面位移向量排列在一起组成的向量。

2　具有弹性连接时的动力学方程

结构的部件之间或子结构之间有时有弹性连接件（例如：拉杆、弹性板等），这时就必须对此做出有效的处理，获得总体的动力学方程。方法是：首先不考虑弹性连接件的影响，形成系统的刚度阵[K]，然后再计算弹性连接件对[K]的贡献，设为[△K]。下面分几种情况进行讨论。

2.1　弹性连接件简化为六个离散弹簧

设简化的六根弹簧的刚度系数分别为 k_x、k_y、k_z、k_{xx}、k_{yy}、k_{zz}，现以连接水平位移的弹簧为例推导如下：

如图 1，设两部件（或子结构）α 和 β 由弹簧 k_x 在点 I 和 J 把它们连接起来，I、J 点的位移假定为 u_I 和 u_J，则有下列关系式：

$$\begin{bmatrix} k_x & -k_x \\ -k_x & k_x \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_I \\ u_J \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_I \\ F_J \end{Bmatrix} \qquad (29)$$

其中：F_I、F_J 分别为弹簧在 I、J 点的受力。

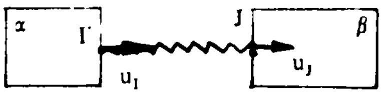

图 1

由此可知弹簧对两部件的作用力为：

$$-\begin{Bmatrix} F_I \\ F_J \end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix} k_x & -k_x \\ -k_x & k_x \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_I \\ u_J \end{Bmatrix} \qquad (30)$$

若不考虑弹性连接时的动力方程是：

$$[K]\{u\}-\omega^2[M]\{u\}=\{0\} \qquad (31)$$

则考虑弹性连接后的方程变为：

$$[K]\{u\}-\omega^2[M]\{u\}=\{0\}-\begin{Bmatrix} F_I \\ F_J \end{Bmatrix}$$

即：

$$([K]+[\triangle K])\{u\}-\omega^2[M]\{u\}=\{0\} \qquad (32)$$

其中：

$$[\triangle K]=\begin{bmatrix} k_x & -K_x \\ -k_x & k_x \end{bmatrix} \qquad (33)$$

由此可看出，考虑弹性连接时，只需将附加刚度[△K]“对号入座”，迭加到整体矩阵[K]中即可。要注意的是，整个迭加过程必须在对应的弹性连接节点位移上进行，同有限元法中形成总刚度阵的集成过程相同，这里不再赘述。

同理，可推出六根离散弹簧同时作用时的贡献刚度：

$$[\triangle K]=\begin{bmatrix} \triangle k & -\triangle k \\ -\triangle k & \triangle k \end{bmatrix} \qquad (34)$$

$$
\text{其中:}\quad \triangle k=\begin{bmatrix} k_x & & & & & \\ & k_y & & & 0 & \\ & & k_z & & & \\ & & & k_{xx} & & \\ & & & & k_{yy} & \\ & 0 & & & & k_{zz} \end{bmatrix} \tag{35}
$$

(32)式中的[K]+[△K]为:

$$
[K]+[\triangle K]=\begin{bmatrix} [K]^{\alpha}+\triangle k & -\triangle k \\ -\triangle k & [K]^{\beta}+\triangle k \end{bmatrix} \tag{36}
$$

2.2 弹性连接件简化为斜弹簧

假设弹簧刚度为k，通过两部件的任意边界点I和J把它们连接起来，用 C_x、C_y 和 C_z 表示弹簧的方位相对整体坐标系的方向余弦。

设I和J点的位移向量为:

$$
\{u\}=\{u_x^I \quad u_y^I \quad u_z^I \quad u_x^J \quad u_y^J \quad u_z^J\}^T
$$

弹簧长度为l，横截面积为A，弹性模量为E，则轴向应变为:

$$
\varepsilon=\frac{1}{l}\{-C_x \quad -C_y \quad -C_z \quad C_x \quad C_y \quad C_z\}\{u\} \tag{37}
$$

设: $$[B]=\frac{1}{l}\{-C_x \quad -C_y \quad -C_z \quad C_x \quad C_y \quad C_z\} \tag{38}$$

则 $\varepsilon=[B]\{u\}$

应力为: $$\sigma=E\varepsilon=[D][B]\{u\} \tag{39}$$

$$[D][B]=E[B] \tag{40}$$

所以: $$[\triangle K]=\int_v [B]^T[D][B]dv=\begin{bmatrix} \triangle\tilde{k} & -\triangle\tilde{k} \\ -\triangle\tilde{k} & \triangle\tilde{k} \end{bmatrix}$$

其中: $$\overline{\triangle k}=k\{C_x \quad C_y \quad C_z\}^T\{C_x \quad C_y \quad C_z\} \tag{41}$$

这里用k代替了$\frac{EA}{l}$。

如果把角位移也考虑进去，则[△K]就成为一般形式的12×12阶方阵:

$$
[\triangle K]=\begin{bmatrix} \triangle k & -\triangle k \\ -\triangle k & \triangle k \end{bmatrix} \tag{42}
$$

其中: $$\triangle k=\begin{bmatrix} \overline{\triangle k} & [0]_{3\times 3} \\ [0]_{3\times 3} & [0]_{3\times 3} \end{bmatrix} \tag{43}$$

$[\triangle K]$对应的位移列阵为:

$$
\{u\}=\{u_x^I \ u_y^I \ u_z^I \ \theta_x^I \ \theta_y^I \ \theta_z^I \ u_x^J \ u_y^J \ u_z^J \ \theta_x^J \ \theta_y^J \ \theta_z^J\}^T \tag{44}
$$

迭加[K]+[△K]的方法同前。

2.3 连接件刚度为无穷大

设连接两子结构某结点位移 u_i、u_j 方向上的弹簧刚度很大，即可视为刚性连接，这时有：

$$u_i = u_j \qquad u_i = u_j \qquad u_i = u_j$$

刚度阵和质量阵的处理方法和一般有限元法类似，就是引入位移连接条件 $u_i = u_j$，具体做法是：使[K]和[M]中第 i 行和第 j 行及列的数值为零，而 $k_{ii}=1$，$k_{ji}=1$，$k_{ij}=k_{ji}=-1$；$m_{ii}=1$，$m_{jj}=1$，$m_{ij}=m_{ji}=-1$。

3 将具有弹性连接时的动力学方程转换到模态坐标

由前面的分析知道，方程(32)是没有降阶的动力学方程，还需将物理坐标转换到模态坐标。

对方程(32)左乘$\begin{bmatrix} [T]_\alpha^T & [0] \\ [0] & [T]_\beta^T \end{bmatrix}$，右乘$\begin{bmatrix} [T]_\alpha & [0] \\ [0] & [T]_\beta \end{bmatrix}$

得：
$$([\bar{K}] + [\overline{\triangle K}])\{q\} - \omega^2[\bar{M}]\{q\} = \{0\} \tag{45}$$

其中：$[\bar{K}]$，$[\bar{M}]$，$\{q\}$同(24)－－(26)式

$$[\overline{\triangle K}] = \begin{bmatrix} [T]_\alpha^T \triangle k [T]_\alpha & -[T]_\alpha^T \triangle k [T]_\beta \\ -[T]_\beta^T \triangle k [T]_\alpha & [T]_\beta^T \triangle k [T]_\beta \end{bmatrix} \tag{46}$$

这样就得到了用模态坐标表示的动力学方程(45)。实现了方程的降阶。这里的迭加过程和有限元法中形成总则的方法相同。

求解方程(45)即得特征值和模态坐标表示的特征向量，最后再通过变换得到用物理坐标表示的特征向量，具体方法同前。

4 小结

具有弹性连接的子结构系统，在工程中应用很多，用上述方法进行分析，理论简单、计算方法和固定界面子结构模态综合法基本类似，比较容易实现，这就使得固定界面法的使用范围进一步扩展。

具有弹性连接时的模态综合法，可总结出下面几步：

(1) 利用固定界面法，求出不考虑弹性连接时系统的$[\bar{K}]$，$[\bar{M}]$；
(2) 分析弹性连接件的类型和性质，求出贡献矩阵$[\overline{\triangle K}]$；
(3) 迭加$[\bar{K}]+[\overline{\triangle K}]$，得到动力学方程(45)；
(4) 求解方程(45)，得出模态坐标下的动特性；
(5) 坐标转换，求出物理坐标下的动特性。

参　考　文　献

1 张汝清等. 计算结构动力学. 重庆大学出版社. 1987
2 王文亮等. 结构振动与动态子结构方法. 复旦大学出版社. 1984
3 黄玉盈. 结构振动分析基础. 华中工学院出版社. 1988
4 全国第五届模态分析与试验学术交流会论文集. 1988
5 刘玉民. 模态综合技术的发展与结构动力优化修改(DASAP)程序理论文本). 郑州机械研究所 1988

Dynamic Substructural Method and Its Application to Resilient Joint System

Miao Tongchen Wang Wei
(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: In this paper, we discussed the influence of resilient joint on dynamic substructural Method and obtained the dynamic equation. So the dynamic substructural method will make a wider and wider application to studying the dynamic property, dynamic response and dynamic modifying of the complex structure.

Keywords: Dynamic Substructure, Model, Dynamic Analysis, Resilient Joint.