第16卷 第1期 郑州工学院学报 Vol.16 No.1
1995年 3 月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Mar. 1995

# 污水管网优化设计*

陆少鸣

（郑州工学院）

**摘　要**：本文提出可行管径法，将排水管网概括为管道序列，通过建立可行管径集合，形成初始管网，以可行管径为决策变量，自下游至上游渐序优化管道序列。该方法依据污水管网特性和数学逻辑确定递推关系，在保证优化精度的前提下，避免无效益决策，收敛速度显著提高。

**关键词**：可行管径，管道序列，决策，阶段

**中图分类号**：TU992

污水管网定线后，尚面临如何合理地确定管径与埋深问题。电算优化技术推动了对这一课题的研究，提出了多种排水管网优化设计方法。这些方法的共同特点是：采用自上游至下游逐段决策直到形成完整管网的递推方式。本文提出的可行管径法首先按流量确定各管段的可行管径集合以及相应的充满度、坡度和流速集合，将规划问题转化为管径序列的规划。取最大管径序列形成完整的初始管网，以污水管网特性具有的约束条件指导管径决策，从下游至上游按阶段实现管道序列的渐次优化。就数学方法而言，可行管径法是以管道序列作为状态，以可行管径作为决策变量的动态规划，其递推过程能权衡每一步决策对本段和下游管线的总体影响，因而提高了收敛速度。

## 1　污水管网的规划模式

### 1.1　已知管段流量，确定可行管径集合

流量一定时，若选择某一规格管径，则应在满足规范要求的前提下采用最小坡度，为此建立如下规划问题：

* 收稿日期：1993－12－28

$$I=n^2(\frac{Q}{\omega})^2(\frac{x}{\omega})^{\frac{4}{3}}$$

$$s.t.\begin{cases}\omega=\frac{D^2}{8}(\alpha-\sin\alpha)\\ x=\frac{D}{2}\alpha\\ \alpha=2\arccos(1-2\frac{h}{D})\\ V_{min}\leqslant\frac{Q}{\omega}\leqslant V_{max}\\ I\geqslant I_{min}\\ 0<\frac{h}{D}\leqslant(\frac{h}{D})_{max}\end{cases}$$

式中:

$I$，$I_{min}$—管道坡度和最小允许坡度；　$\frac{h}{D}$，$(\frac{h}{D})_{max}$—充满度和最大允许充满度；

$V_{min}$，$V_{max}$—最小和最大允许流速，$m/s$；　$Q$—管段流量，$m^3/s$；

$D$—管段直径，$m$；　$\omega$—过水断面面积，$m^2$；

$x$—湿周，$m$；　$\alpha$—湿周对应的圆心角，$rad$；

$n$—管道粗糙系数。

当$Q$和$D$已知时，$I$为$\frac{h}{D}$的单值函数，且在可行域内$\frac{dI}{d(\frac{h}{D})}<0$。因此$\frac{h}{D}$越大，则$I$越小。据此唯一确定$I$和$\frac{h}{D}$。

对于确定的管段流量，存在若干标准规格管径可供选择，这些管径的最小坡度$I$具有如下变化规律:

当对应的$\frac{h}{D}<0.5$时，随着管径增大，$I$也增大；而当$\frac{h}{D}\geqslant0.5$时，随着$D$增大，$I$减小。

D大且I也大的这类管径显然不会被采用，据此可确定可行管径集合的上界，该管径最大，而其坡度和充满度最小；由于$V_{max}$和最小允许管径$D_{min}$的约束，也必然存在可行管径集合的下界，该管径最小，而其坡度和充满度最大。

以$\vec{D}_j$、$\vec{I}_j$、$\overrightarrow{(\frac{h}{D})}_j$、$\vec{V}_j$分别表示第$j$管段可行管径从大到小排列的集合及其相应的坡

度、充满度和流速集合，则有：

$$\vec{D}_j=\begin{bmatrix}D_{1j}\\D_{2j}\\\cdots\\D_{ij}\\\cdots\\D_{mj}\end{bmatrix}\quad \vec{I}_j=\begin{bmatrix}I_{1j}\\I_{2j}\\\cdots\\I_{ij}\\\cdots\\I_{mj}\end{bmatrix}\quad \overrightarrow{(\frac{h}{D})}_j=\begin{bmatrix}(\frac{h}{D})_{1j}\\(\frac{h}{D})_{2j}\\\cdots\\(\frac{h}{D})_{ij}\\\cdots\\(\frac{h}{D})_{nj}\end{bmatrix}\quad \vec{V}_j=\begin{bmatrix}V_{1j}\\V_{2j}\\\cdots\\V_{ij}\\\cdots\\V_{mj}\end{bmatrix}$$

1.2 污水管网可行管径法规划模式

以图1所示的管线为例：

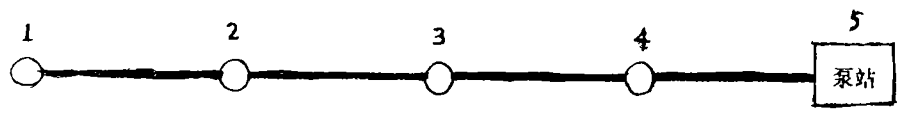


图1

①以图1各管段最大可行管径构成初始管线。各节点的地面高程及其最小允许埋深均为已知条件，因此，将上述管径、坡度及充满度已经确定的各个管段组成管线并不困难。该管线表示为 $PL_4^1=(D_{1,1}, D_{1,2}, D_{1,3}, D_{1,4})$。

②以污水管网的造价及运行费用建立目标函数。目标函数 W（PL）由管线 PL 唯一确定。图1的目标函数如下：

$$W(PL)=C_1\cdot\sum_{j=1}^{4}WL_j+C_2\cdot WP+WE$$

式中：

$C_1$、$C_2$—费用系数，1／a；

$WL_j$—第 j 管段造价，元；

WP、WE—泵站造价（元）及电费（元／年）。

WP 和 WE 与节点 5 的流量和埋深有关，且随着埋深的增加而增大；WL 与管段的管径、埋深及管长有关，可按费用指标通过插值法确定，也可采用类似如下造价函数计算：

$$WL=(a+b\cdot D^2+c\cdot H^2)L$$

式中：　a、b、c—造价系数；

D、H、L—管段的直径、长度及埋深。

③以管径作为决策变量。污水管网的管段埋深、坡度及充满度等皆为连续变量，在其可行域内可取数值是无限的；管径是离散变量，只能在各管段可行管径集合内取若干值。因为决策次数是有限的，故以管径作为决策变量不会引入人为误差。

④从下游至上游按管段顺序划分规划阶段。在图 1 中，共有 4 个阶段，第 4 阶段仅对管段 4 进行决策，而管段 1 至管段 3 保持不变；第 3 阶段则对管段 3 和管段 4 进行决策，管段 1 和管段 2 不变；第 2 阶段和第 1 阶段按此类推。可见在每个阶段，只对本段及其下游各管段进行决策，上游管段维持原状态不变。

⑤建立递推函数。在可行管径法中，各管段的可行管径集合已确定，最优管线必定是各管段某一可行管径构成的序列。理论上可以采用排列组合的方法获得最优管线，但当管段较多时，组合数将大大增加。以图 1 为例，设各管段的可行管径数依次为 m1、m2、m3 和 m4，则共有 m1・m2・m3・m4 种组合方式。因此，对于管段数较多的管网，采用排列组合的方式显然很困难，甚至无法实现。可行管径法针对污水管网特性相应建立递推函数和约束条件，在保证优化精度的前提下，尽可能避免不必要的决策。

以 $PL_j^m$ 表示第 j 阶段第 m 步规划的输入状态。$PL_j^m$ 的管径序列为：

$$PL_j^m=(D_{1,1},\ \cdots,\ D_{1,j-1},\ D_{m,j},\ \cdots,\ D_{ik,k},\ \cdots,\ D_{in,n})$$

以 $PL_{j,i}^m$($j<i<n$，n 为最末段编号）表示对输入状态进行管径决策后的若干结果。

当 $i=j$ 时，表示将 $PL_j^m$ 的第 j 段管径减小一级，其它管径不变所形成的序列，即：

$$PL_{j,i}^m=(D_{1,1},\ \cdots,\ D_{1,j-1},\ D_{m+1,j},\ \cdots,\ D_{ik,k},\ \cdots,\ D_{in,n})$$

当 $i=k>j$ 时，表示将 $PL_j^m$ 的第 j 段管径减小一级的同时，将其第 k 段管径增大一级，其它管径一律保持不变所形成的序列，即：

$$PL_{j,k}^m=(D_{1,1},\ \cdots,\ D_{1,j-1},\ D_{m+1,j},\ \cdots,\ D_{ik-1,k},\ \cdots,\ D_{in,n})$$

以 $PL_j^{m+1}$ 表示 $PL_j^m$ 对应的输出状态。$PL_j^{m+1}$ 是 $PL_j^m$ 经如下递推函数变换产生的。逆推函数为：

$$W(PL_j^{m+1})=\min\{W(PL_j^m),\ W(PL_{j,i}^m)|_{i=j,j+1,\cdots,n}\}$$

当 $W(PL_j^{m+1})=W(PL_{j,i}^m)$时，决策产生了效果，表明当前状态仍有进一步规划的潜力。故应取 $PL_j^{m+1}=PL_{j,i}^m$ 作为第 j 阶段第 m+1 步规划的输入将态，继续进行本阶段规划。

当 $W(PL_j^{m+1})=W(PL_{j,i}^m)$时，决策未产生效果，表明 $PL_j^m$ 的第 j 管段及其下游已成为当前阶段的最优序列，故应取 $PL_{j-1}^1=PL_j^m$ 作为第 j−1 阶段的初始输入状态，进行第 j−1 阶段的规划。

按上述程序逐次规划，直至第 1 阶段出现 $W(PL_1^{m+1})=W(PL_1^m)$为止，最终的优化管径序列即为: $PL_0^1=PL_1^m$。

现以图 1 为例更具体地演示输入状态与输出状态的递推关系。设该管第 2 阶段第 1 步规划的输入状态为: $PL_2^1=(D_{1,1},\ D_{1,2},\ D_{3,3},\ D_{3,4})$

则有: $PL_{2,2}^1=(D_{1,1},\ D_{2,2},\ D_{3,3},\ D_{3,4})$

$PL_{2,3}^1=(D_{1,1},\ D_{2,2},\ D_{2,3},\ D_{3,4})$

$PL_{2,4}^1=(D_{1,1},\ D_{2,2},\ D_{3,3},\ D_{2,4})$

$W(PL_2^2)=\min\{W(PL_2^1),W(PL_{2,i}^1)|_{i=2,3,4}\}$

若 $W(PL_2^2)=W(PL_{2,3}^1)$, 则取 $PL_2^2=PL_{2,3}^1$，进一步求 $W(PL_2^3)$；若 $W(PL_2^2)=W(PL_2^1)$，则取:$PL_1^1=PL_2^1$ 开始第 1 阶段的优化。

## 2 可行管径法优化理论

在可行管径集合中存在最优管径序列，可行管径法能否收敛于最优解，尚需加以论证；污水管网存在若干特性，是建立递推函数的重要条件，也是论证过程的理论依据。

### 2.1 污水管网若干特性

特性 1: 当对本段及下游的埋深影响相同时，管径越大，减小管径的获益越大（$\frac{\partial^2 W}{\partial D^2}>0$）。

特性 2: 管线造价（费用目标值）随起点埋深增大而增大（$\frac{\partial W}{\partial H}>0$, $\frac{\partial^2 W}{\partial H^2}>0$）

特性 3: 随着埋深增大，减小管径相应的获益降低（$\frac{\partial^2 W}{\partial D\partial H}<0$, $\frac{\partial W}{\partial D}>0$）。

将管线 $PL$ 的第 $j$ 段 $D_{m,j}$ 减小一级为 $D_{m-1,j}$，同时将第 $k$ 段 $D_{e,k}$ 增加一级为 $D_{e-1,k}$（$k>j$），其它段管径不变。以 $\triangle h_j$ 和 $\triangle h_k$ 分别表示两管段的降落增量，则有如下特性:

特性 4: $\triangle h_j+\triangle h_k>0$ 是 $D_{m,j}\leqslant D_{e,k}$ 的充分条件（并非必要条件）。

特性 1—3 由费用目标函数验证；特性 4 证明如下：以各检查井间距划分设计管段，

则：　$Q_k \geqslant Q_j$，$L_k \geqslant L_j$　且　$L_k / L_j \approx 1$.

$\because$　$\triangle h_j + \triangle h_k > 0$　　$\therefore$　$I_{m+1,j} - I_{m,j} > I_{e,k} - I_{e-1,k}$

若，$D_{m,j} = D_{e-1,k}$，　则由$\dfrac{\partial^2 I}{\partial D \partial Q} < 0$ 可以推论：

$\dfrac{I_{e-1,k} - I_{e,k}}{\triangle D} - \dfrac{I_{m,j} - I_{m+1,j}}{\triangle D} < 0$，也即：　$I_{m+1,j} - I_{m,j} \leqslant I_{e,k} - I_{e-1,k}$

故当 $I_{m+1,j} - I_{m,j} > I_{e,k} - I_{e-1,k}$ 时，由$\dfrac{\partial I}{\partial D} < 0$ 和$\dfrac{\partial^2 I}{\partial D^2} > 0$ 可得结论：

$D_{m,j} \leqslant D_{e,k} < D_{e-1,k}$成立。

## 2.2　收敛论证

采用数学归纳法证明：

① 在第 $n$ 阶段，仅第 $n$ 段变管径。若出现 $W(PL_n^{m+1}) = W(PL_n^m)$，表明 $D_{m,n}$ 减小至 $D_{m+1,n}$ 时 $W$ 增加。由$\dfrac{\partial W}{\partial D} > 0$ 且$\dfrac{\partial^2 W}{\partial D^2} > 0$ 可知，$PL_{n-1}^1 = PL_n^m$ 必是 $n$ 阶段最优线。

② 设 $PL_j^1$ 为第 $j+1$ 阶段最优线。$PL_j^1$ 上第 $j+1 \sim n$ 段的管径序列则是在第 $j+1$ 阶段 $j+1$ 节点的埋深控制条件下的最优序列。只要 $j+1$ 节点埋深不变，管径序列的任何变动只会增加费用目标值。

③ 进入第 $j$ 阶段时，第一步规划形成的管线为 $PL_{jj}^1$、$PL_{j,k}^1 (k = j+1 \sim n)$。

令：　$\triangle H_l^{(i)} = H_l(PL_{j,i}^1) - H_l(PL_j^1)$，则：

$$\triangle H_l^{(i)} = (I_{2,j} - I_{1,j}) L_j > 0 \qquad (j+1 \leqslant l \leqslant n+1)$$

$$\triangle H_l^{(k)} = \begin{cases} (I_{2,j} - I_{1,j}) L_j > 0 & (j+1 \leqslant l \leqslant k) \\ (I_{2,j} - I_{1,j}) L_j - (I_{k1,k} - I_{k1-1,k}) L_k & \{I_{k1,k} = I_k(PL_j^1),\ k+1 \leqslant l \leqslant n+1\} \end{cases}$$

比较 $PL_{j,i}^1$ 与 $PL_j^1$ 可知：因为 $\triangle H_l^{(j)} > 0$ 且$\dfrac{\partial^2 W}{\partial D \partial H} < 0$、$\dfrac{\partial W}{\partial D} > 0$，$PL_{j,j}^1$ 上第 $j+1 \sim n$ 管段减小管径均不能降低目标值 $W$。

对于 $PL_{j,k}^1 (j+1 \leqslant k \leqslant n)$，由特性 4 及$\dfrac{\partial W}{\partial D} > 0$、$\dfrac{\partial^2 W}{\partial D^2} > 0$ 且 $\triangle H_l^{(k)} > 0 (j+1 \leqslant l \leqslant k)$ 可以推论：$W(PL_{j,k}^1) < W(PL_j^1)$ 的必要条件是 $\triangle H_{K+1}^{(k)} < 0$

（否则$\triangle H_l^{(k)}|_{j+1\leqslant l\leqslant n+1}>0$且$D_{kl-l,k}>D_{mj}$）。

比较$PL_{j,k}^1$与$PL_j^1$可知：若$W(PL_{j,k}^1)<W(PL_{j,k}^1)$成立，则$\triangle H_l^{(k)}|_{l=k+1-n}$ $=\triangle H_{k+1}^{(k)}<0$。根据$\frac{\partial^2 W}{\partial D\partial H}<0$及$\frac{\partial W}{\partial D}>0$可以推论，$PL_{j,k}^1$上第$k+1\sim n$管段增大管径均不能减小$W$值，而第$k$段平均埋深增量为$\overline{\triangle H_k}=\frac{1}{2}[\triangle H_k^{(k)}-|\triangle H_{k+1}^{(K)}|]$很小，且$\frac{\partial^2 W}{\partial D^2}>0$，也可不必再增大管径。但$\triangle H_{k+1}^{(k)}<0$，理论上$PL_{jk}^1$第$k+1\sim n$段减小管径可能降低$W$值。由于在规划进程中埋深呈增加趋势（第$1\sim j-1$段管径只会减小），且$|\triangle H_{k+1}^{(k)}|=|\triangle h_k|-|\triangle h_j|=(I_{kl,k}-I_{kl-l,k})L_k-(I_{2j}-I_{1j})L_j$，很小，故这种可能性可忽略不计。

故可结论：$PL_j^2\in(PL_j^1, PL_{j,i}|_{i=j,j+1,\cdots,n})$，且$PL_j^2$具有如下特点：当$D_j(PL_j^2)$不再减小时，其它管径的变化只会增大$W$值。因此，当$PL_j^{m+1}=PL_j^m$时，表明$D_{mj}$不能再减小，故$PL_{j-1}^1=PL_j^{m+1}=PL_j^m$必为$j$阶段最优线。

因此，第1阶段$PL_0^1$为最优管径序列。

由于忽略了$\triangle H_{K+1}^{(k)}<0$的影响，$PL_0^1$仍具有优化余地。以$PL_n^1=PL_0^1$作新一轮规划，可减小误差。

2.3 其它约束条件的运用

① 与管径对应的$V_{min}$、$I_{min}$、$(\frac{h}{D})_{max}$以及$V_{max}$和$D_{min}$在建立$\bar{D}$、$\bar{I}$、$\bar{V}$和$\frac{\bar{h}}{D}$集合的过程中已被采用。

② 管段的衔接可按管顶平接或水面平接，但必须满足如下条件：下游段起点埋深不得小于上游段末端埋深，且不得小于该节点最小允许埋深，下一段管径小于上一段管径时，应视上段管径的大小，不得小于一至二级。

③ 污水直接排放水体或已有管道时，管网终点未设泵站，代之以最大允许埋深$H_{max}$作为约束，必须满足$H_{n+1}\leqslant H_{max}$。在一般情况下，只将该约束作为普通约束，按正常方式进行规划。当出现$W(PL_{jj}^m)<W(PL_j^m)$、$H_{n+1}(PL_{jj}^m)>H_{max}$且$W(PL_{j,k}^m)_{(k=j+1\cdots n)}$ $>W(PL_j^m)$这一特殊情况时，则应将$H_{n+1}$视为资源，采取如下措施：

$PL_{j,j}^{m}$ 可视为由 $PL_{j,k}^{m}$ 上第 $k$ 段管径减小一级形成的，则第 $k$ 段减小管径时，单位降深所得收益为：

$$[\frac{dW}{dH}]_k = \frac{W(PL_{j,j}^{m}) - W(PL_{j,k}^{m})}{H_{n+1}(PL_{j,j}^{m}) - H_{n+1}(PL_{j,k}^{m})}$$

而第 $j$ 段管径减小一级对应的单位收益为：

$$[\frac{dW}{dH}]_j = \frac{W(PL_{j,j}^{m}) - W(PL_{j}^{m})}{H_{n+1}(PL_{j,j}^{m}) - H_{n+1}(PL_{j}^{m})}$$

若 $[\frac{dW}{dH}]_j > [\frac{dW}{dH}]_k$，尽管 $W(PL_{j,k}^{m}) > W(PL_{j}^{m})$，但 $PL_{j,k}^{m}$ 的单位收益比 $PL_{j}^{m}$ 大，可为下一步规划富余更多的终点降深资源，故取 $PL_{j}^{m+1} = PL_{j,k}^{m}$。当然，$PL_{j}^{m}$ 仍是当前状态下的实际最优管线，将其记录下来，若规划结束时，始终末出现比 $PL_{j}^{m}$ 更优的管线，则应取 $PL_{n}^{1} = PL_{j}^{m}$。

若 $[\frac{dW}{dH}]_j < [\frac{dW}{dH}]_k$，表明第 $k$ 段管径减小总比第 $j$ 段有利，必然取 $PL_{j-1}^{1} = PL_{j}^{m}$。

可行管径法决策次数很少。一般情况下，管线上游各阶段不多于两步规划，而下游通常不超过 3 步规划，决策次数 $N$ 可粗略估计为：

$$N \approx 2[\frac{1}{2}(n + \frac{n}{2})\frac{n}{2}] + 3(\frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}) \approx n^2$$

# Optimal Design of Sewer Networks

Lu Shaoming

(Zhengzhou Institute of Technology)

**Abstract:** According to Possible Diameter Method put up in this article, sewer networks can be generalized as pipe ranks. After the array of possible diameters determined and the original pipe ranks formed, possible diameters be chosed as decision changes to optimize the ranks by stages from the end to the beginnings of the networks. For the transition function constructed under the characteristics of sewer networks and mathematical logic, useless decisions can be avoided and the contraction process greatly sped up without affecting the terminal result.

**Keywords:** Possible Diameter, Pipe Rank, Decision, Stage.