第16卷 第3期 郑州工学院学报 Vol.16 No.3
1995年 9 月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Sep. 1995

# 一类二维计量抽样方案*

韩芝隆

(教学教研室)

**摘 要**: 目前抽样方案主要研究一维的情况，本文给出总体服从二维正态分布的二维计量抽样方案，并求出其 OC 函数。二维抽样方案在实际问题中有广泛的应用，因此本文的研究不仅有一定的理论意义，还有一定的实用价值。

**关键词**: 二维抽样方案，OC 函数，接收概率

**中图分类号**: O212

设产品特征(X, Y)服从二维正态分布，且 X 与 Y 为独立同分布的随机度量，$EX=EY=\mu$, $DX=DY=\sigma^2$, 从批中抽出一容量为 n 的样本，样本观察值为 $(x_1, y_2)$, $(x_2, y_2)$, …, $(x_n, y_n)$.

本文主要在讨论以均值衡量批质量的情况。

## 1 具有单侧下规定限的情形

规定当 X 与 Y 的均值 $\mu$ 都大于或等于予先规定的下限 $\mu_0$ 时，认为产品是合格的，$\mu$ 越大越好。设 $\mu_1$ 为小于 $\mu_0$ 的某个数值，我们要求建立一个抽样方案，使满足下列两条质量要求: ①当 X 与 Y 的均值 $\mu$ 大于或等于 $\mu_0$ 时，以不低于 $1-\alpha$ 的高概率接收这批产品，②当 X 与 Y 的均值 $\mu$ 小于或等于 $\mu_1$ 时，只允许以不超过 $\beta$ 的低概率接收这批产品，$\alpha$ 与 $\beta$ 分别为生产方与使用方风险。

### 1.1 $\sigma$ 已知 $\mu$ 未知的情况

假定 X 与 Y 的真均值 $\mu$ 未知，只希望 $\mu$ 大于或等于 $\mu_0$，要这样样本均值 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 都不能太小，因此为了判断这批产品是否合格，采用以下判断规则是适宜的。

$$\begin{cases} \text{当}\overline{X}\geqslant k \quad \text{且}\overline{Y}\geqslant k\text{时}, & \text{接收此批} \\ \text{其它情况}, & \text{拒收此批} \end{cases} \tag{1}$$

其中 k 为一待定数值。满足上述两条质量要求并具有形式(1)的判断规则的计量一次抽样方案，由样本大小 n 和待定数值 k 完全确定，n 与 k 山满足上述两条质量要求的下列等式确定:

* 收稿日期: 1995-02-22

$$\text{当}\mu=\mu_o\text{时}, \quad P_\mu\{\bar{X}\geqslant k, \quad \bar{Y}\geqslant k\}=1-\alpha \tag{2}$$

$$\text{当}\mu=\mu_1\text{时}, \quad P_\mu\{\bar{X}\geqslant k, \quad \bar{Y}\geqslant k\}=\beta \tag{3}$$

这里 $P_\mu\{\bar{X}\geqslant k, \quad \bar{Y}\geqslant k\}$，表示对任意已知的 $\mu$ 而言，事件 $\{\bar{X}\geqslant k, \quad \bar{Y}\geqslant k\}$ 发生的概率，即抽样方案的接收概率。它依赖于 $\mu$，是 $\mu$ 的函数。

由(2)式

$$P_{\mu_o}\{\bar{X}\geqslant k, \quad \bar{Y}\geqslant k\}=P_{\mu o}\{\frac{\bar{X}-\mu o}{\sigma/\sqrt{n}}\geqslant\frac{k-\mu o}{\sigma/\sqrt{n}}\}\cdot P_{\mu o}\{\frac{\bar{Y}-\mu o}{\sigma/\sqrt{n}}\geqslant\frac{k-\mu o}{\sigma/\sqrt{n}}\}$$

$$=[1-\Phi(\frac{k-\mu o}{\sigma/\sqrt{n}})]^2=\Phi^2(-\frac{k-\mu_o}{\sigma/\sqrt{n}})=1-\alpha$$

这里$\Phi(x)$表示服从标准正态分布的随机变量的分布函数。所以

$$-(k-\mu_o/\sigma/\sqrt{n} \quad =\Phi^{-1}(\sqrt{1-\alpha}) \tag{4}$$

其中$\Phi^{-1}(u)$为$\Phi(x)$的反函数。

由(3)式

$$P_{\mu_1}\{\bar{X}\geqslant k, \bar{Y}\geqslant k\}=P_{\mu_1}\{\frac{\bar{X}-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\geqslant\frac{k-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\}\cdot P_{\mu_1}\{\frac{\bar{Y}-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\}\geqslant\frac{k-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\}$$

$$=[1-\Phi(\frac{k-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}})]^2=\Phi^2(-\frac{k-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}})=\beta$$

即
$$-\frac{k-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}=\Phi^{-1}(\sqrt{\beta}) \tag{5}$$

在式(4)、(5)中，$\mu_o$，$\mu_1$，$\sigma$，$\alpha$，$\beta$ 均为已知，将此两式联立即可求出 $n$ 与 $k$。

$$\begin{cases} n=\dfrac{\sigma^2}{(\mu_o-\mu_1)^2}[\Phi^{-1}(\sqrt{1-\alpha})-\Phi^{-1}(\sqrt{\beta})] \\ k=\mu_o+\dfrac{(\mu_o-\mu_1)\Phi^{-1}(\sqrt{1-\alpha})}{\Phi^{-1}(\sqrt{\beta})-\Phi^{-1}(\sqrt{1-\alpha})} \end{cases} \tag{6}$$

上述抽样方案的抽检特性函数（即 $OC$ 函数）为

$$\begin{aligned} L(\mu)&=P_\mu\{\bar{X}\geqslant k, \bar{Y}\geqslant k\} \\ &=P\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\geqslant\frac{k-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\}\cdot P\{\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\geqslant\frac{k-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\} \\ &=[1-\Phi(\frac{k-\mu}{\sigma/\sqrt{n}})]^2=\Phi^2(-\frac{k-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}) \end{aligned} \tag{7}$$

当$\sigma$，$n$，$k$都已知时，对于$\mu$的任意值由(7)式即可求出方案$(n, k)$的接收概率。

1.2　$\sigma$, $\mu$ 均未知的情况

为判断一批产品是否合格，采用如下形式的判断规则是适宜的:

$$\begin{cases}\text{当}\bar{X}-ts\geqslant\mu_o\text{且}\bar{Y}-ts_2\geqslant\mu_o\text{时，接收}\\ \text{其它情况，拒收}\end{cases}\tag{8}$$

其中 $s_1$ 为样本 $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ 的标准差，$s_2$ 为样本 $y_1$, $y_2$, …, $y_n$ 的标准差，$t$ 为待定数值。

为求得具有形如 (8) 的判断规则，同时又满足第 1 段开始所提出的两条质量要求的计量抽样方案，就要求 $n$ 和 $t$ 的值，使它们同时满足以下两个条件

$$\text{当}\mu=\mu_o\text{时，}P_\mu\{\bar{X}-ts_1\geqslant\mu_o,\ \bar{Y}-ts_2\geqslant\mu_o\}=1-\alpha\tag{9}$$

$$\text{当}\mu=\mu_1\text{时，}P_\mu\{\bar{X}-ts_1\geqslant\mu_o,\ \bar{Y}-ts_2\geqslant\mu_o\}=\beta\tag{10}$$

即当 $\mu=\mu_o$ 时，

$$P\{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_o)}{s_1}\geqslant\sqrt{n}\,t,\quad\frac{\sqrt{n}(\bar{Y}-\mu_o)}{s_2}\geqslant\sqrt{n}\,t\}=1-\alpha$$

当 $\mu=\mu_1$ 时，

$$P\{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_o)}{s_1}\geqslant\sqrt{n}\,t,\ \frac{\sqrt{n}(\bar{Y}-\mu_o)}{s_2}\geqslant\sqrt{n}\,t\}=\beta$$

由于当 $\mu=\mu_o$ 时，$\bar{X}-\mu_o\sim N(0,\frac{\sigma^2}{n})$，又 $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim x^2(n-1)$，所以 $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_o)}{s}$ 服从自由度为 $n-1$ 的 $t$ 分布。（由 $t$ 分布定义可得）。

类似地，当 $\mu=\mu_1$ 时，由于 $\bar{X}-\mu_o\sim N(\mu_1-\mu_o,\frac{\sigma^2}{n})$，$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim x^2(n-1)$，所以 $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_o)}{s}$ 服从自由度为 $n-1$ 的非中心 $t$ 分布。

由上所述，要从式 (9)，(10) 解出 $n$，$t$ 需要利用 $t$ 分布表与非中心 $t$ 分布表。这种方法比较麻烦，也可用下面一种近似解法。

由正态分布的性质知，当样本容量 $n$ 比较大，$\mu=\mu_o$ 时，$\bar{X}-ts$ 近似服从均值为 $\mu_o-t\sigma$，方差为 $\sigma^2(\frac{1}{n}+\frac{t^2}{2(n-1)})$ 的正态分布。同样地，当 $\mu=\mu_1$ 时，$\bar{X}-ts$ 近似服从均值为 $\mu_1-t\sigma$，方差为 $\sigma^2(\frac{1}{n}+\frac{t^2}{2(n-1)})$ 的正态分布。

由(9)式近似得到

$$\begin{aligned}&P\{\bar{X}-ts_1\geqslant\mu_o,\ \bar{Y}-ts_2\geqslant\mu_o\}\\&=P\{\bar{X}-ts_1\geqslant\mu_o\}\cdot P\{\bar{Y}-ts_2\geqslant\mu_o\}\end{aligned}$$

$$=\left[1-\Phi\left(\frac{\mu_o-(\mu_o-t\sigma)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{t^2}{2(n-1)}}}\right)\right]^2=\Phi^2\left(\frac{-t}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{t^2}{2(n-1)}}}\right)=1-\alpha$$

即
$$\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{t^2}{2(n-1)}}}=-\Phi^{-1}(\sqrt{1-\alpha}) \tag{11}$$

同理，由(9)式得

$$P\{\bar{X}-ts_1\geqslant\mu_o,\ \bar{Y}-ts_2\geqslant\mu_o\}$$

$$=\left[1-\Phi\left(\frac{\mu_o-(\mu_1-t\sigma)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{t^2}{2(n-1)}}}\right)\right]^2$$

$$=\Phi^2\left(\frac{\mu_1-\mu_o-t\sigma}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{t^2}{2(n-1)}}}\right)=\beta$$

即
$$\frac{\mu_1-\mu_o-t\sigma}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{t^2}{2(n-1)}}}=\Phi^{-1}(\sqrt{\beta}) \tag{12}$$

由于 $n$ 比较大，$\frac{n-1}{n}\approx 1$，故(11)，(12)式可近似写为

$$\frac{\sqrt{n}\,t}{\sqrt{1+\frac{t^2}{2}}}=-\Phi^{-1}(\sqrt{1-\alpha}) \tag{13}$$

$$\frac{\sqrt{n}(\mu_1-\mu_o-t\sigma)}{\sigma\sqrt{1+\frac{t^2}{2}}}=\Phi^{-1}(\sqrt{\beta}) \tag{14}$$

由(13)，(14)式可解得$n$，$t$，即

$$\begin{cases} t=\dfrac{(\mu_o-\mu_1)\Phi^{-1}(\sqrt{1-\alpha})}{\sigma[\Phi^{-1}(\sqrt{\beta})-\Phi^{-1}(\sqrt{1-\alpha})]} \\ n=\left[\dfrac{\sigma(\Phi^{-1}(\sqrt{\beta})-\Phi^{-1}(\sqrt{1-\alpha}))}{\mu_o-\mu_1}\right]^2+\dfrac{1}{2}[\Phi^{-1}(\sqrt{1-\alpha})]^2 \end{cases} \tag{15}$$

将(15)式与(6)式做比较，可见当 $\sigma$ 未知时所需样本增大了$\frac{1}{2}[\Phi^{-1}(\sqrt{1-\alpha})]^2$

上述抽样方案的抽检特性函数(即$OC$函数)为

$$L(\mu)=P_\mu\{\bar{X}-ts_1\geqslant\mu_o,\ \bar{Y}-ts_2\geqslant\mu_o\}$$

$$=\left[1-\Phi\left(\frac{\mu_0-(\mu-t\sigma)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{t^2}{2(n-1)}}}\right)\right]^2=\Phi^2\left(\frac{\mu-\mu_0-t\sigma}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{t^2}{2(n-1)}}}\right)$$

其中 $t$ 值由 (15) 式确定，$\sigma$ 未知可由以往的检验数据给出其估计值。

## 2　具有单侧上规定限的情形

规定当 X 与 Y 的均值 $\mu$ 小于或等于某个予先规定的上限 $\mu_0$ 时，认为产品是合格的，$\mu$ 越小越好，设 $\mu_1$ 为大于 $\mu_0$ 的某个值。我们要求建立一个抽样方案，使满足下面两条质量要求：①当 X 与 Y 的均值 $\mu$ 小于或等于 $\mu_0$ 时，以不低于 $1-\alpha$ 的高概率接收这批产品，②当 X 与 Y 的均值 $\mu>\mu_1$ 时，只允许以不越过 $\beta$ 的低概率接收这批产品。$\alpha$ 与 $\beta$ 分别为生产方与使用方风险。

### 2.1　$\sigma$ 已知 $\mu$ 为未知的情况

假定 X 与 Y 的真均值 $\mu$ 未知，只希望 $\mu<\mu_0$，要这样，样本均值不能太大，因此为了判断这批产品是否合格，采取以下判断规则是适宜的：

$$\begin{cases}\text{当}\bar{X}\leqslant k\text{且}\bar{Y}\leqslant k\text{时，接收此批}\\ \text{其它情况，拒收此批}\end{cases}\tag{16}$$

其中$k$为待定数值

满足上述两条质量要求，并具有形式（16）的判定规则的计量一次二维抽样方案由样本大小和待定数值完全决定。n，k 由满足上面两条质量要求的下列等式确定。

当 X 与 Y 的均值等于 $\mu_0$ 时

$$P_{\mu}\{\bar{X}\leqslant k,\ \bar{Y}\leqslant k\}=1-\alpha\tag{17}$$

当$X$与$Y$的均值等于$\mu_1$时

$$P_{\mu}\{\bar{X}\leqslant k,\ \bar{Y}\leqslant k\}=\beta\tag{18}$$

由(17)式

$$P_{\mu_0}\{\bar{X}\leqslant k,\ \bar{Y}\leqslant k\}=P\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\leqslant\frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\}P\{\frac{\bar{Y}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\leqslant\frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\}$$

$$=\Phi^2(\frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}})=1-\alpha$$

即
$$\frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\Phi^{-1}(\sqrt{1-\alpha})\tag{19}$$

由(18)式
$$P_{\mu_1}\{\bar{X}\leqslant k,\ \bar{Y}\leqslant k\}=P\{\frac{\bar{X}-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\leqslant\frac{k-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\}P\{\frac{\bar{Y}-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\leqslant\frac{k-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\}$$

$$=\Phi^2(\frac{k-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}})=\beta$$

即 $\dfrac{k-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}=\Phi^{-1}(\sqrt{\beta})$ (20)

将此两式联立，查标准正态分布表，即可求出 $n$ 与 $k$，即

$$n=\frac{\sigma^2}{(\mu_1-\mu_o)^2}[\Phi^{-1}(\sqrt{1-\alpha})-\Phi^{-1}(\sqrt{\beta})]$$

$$k=\mu_o+\frac{(\mu_1-\mu_o)\Phi^{-1}(\sqrt{1-\alpha})}{\Phi^{-1}(\sqrt{1-\alpha})-\Phi^{-1}(\sqrt{\beta})} \tag{21}$$

上述抽样方案的抽检特性函数为

$$L(\mu)=P_\mu\{\overline{X}\leqslant k,\ \overline{Y}\leqslant k\}$$
$$=[P\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\leqslant\frac{k-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\}]^2=\Phi^2(\frac{k-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}) \tag{22}$$

当 $\sigma$, n, k 都已知时，对于 $\mu$ 的任意值，由(22)式即可求出方案（n, k）的接收概率。

2.2　$\sigma$ 和 $\mu$ 均为未知的情况

为判断产品是否合格，采取如下形式的判断规则是适宜的

$$\begin{cases}\text{当}\overline{X}-ts_1\leqslant\mu_o\text{且}\overline{Y}-ts_2\leqslant\mu_o\text{时，接收}\\ \text{其它情况，拒收}\end{cases} \tag{23}$$

其中 $s_1$ 为样本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的标准差，$s_2$ 为样本 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 的标准差，$t$ 为待定的数值。

为求得具有形式（23）的判断规则，同时又满足第 2.1 段开始提出的两条质量要求的计量抽样方案，就要求 $n$ 和 $t$ 的值，使它们同时满足以下两个条件

当 $X$ 与 $Y$ 的均值等于 $\mu_o$ 时，

$$P_\mu\{\overline{X}-ts_1\leqslant\mu_o,\ \overline{Y}-ts_2\leqslant\mu_o\}=1-\alpha \tag{24}$$

当 $X$ 与 $Y$ 的均值等于 $\mu_1$ 时，

$$P_\mu\{\overline{X}-ts_1\leqslant\mu_o,\ \overline{Y}-ts_2\leqslant\mu_o\}=\beta \tag{25}$$

即当 $\mu=\mu_o$ 时，

$$P\{\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_o)}{s_1}\leqslant\sqrt{n}t,\ \frac{\sqrt{n}(\overline{Y}-\mu_o)}{s_2}\leqslant\sqrt{n}t\}=1-\alpha \tag{26}$$

当 $\mu=\mu_1$ 时，

$$P\{\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_o)}{s_1}\leqslant\sqrt{n}t,\ \frac{\sqrt{n}(\overline{Y}-\mu_o)}{s_2}\leqslant\sqrt{n}t\}=\beta \tag{27}$$

与1.2段的理由相同有

当 $\mu=\mu_o$ 时，$\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_o)}{s}\sim t(n-1)$

当 $\mu=\mu_1$ 时，$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{s}$ 服从自由度为 $n-1$ 的非中心 $t$ 分布，所以只需查 $t$ 分布与非中心 $t$ 分布表，即可用（26）、（27）式解出 $n$ 和 $t$，但此法较繁，可用下法近似计算。

当 $\mu=\mu_0$ 时，$\bar{X}-ts$ 近似服从 $N(\mu_0-t\sigma,\ \sigma^2(\frac{1}{n}+\frac{t^2}{2(n-1)})$ 分布，当 $\mu=\mu_1$ 时，$\bar{X}-ts$ 近似服从 $N(\mu_1-t\sigma,\ \sigma^2(\frac{1}{n}+\frac{t^2}{2(n-1)})$ 分布，与算 1.2 段类似可求得

$$t=\frac{(\mu_0-\mu_1)\Phi^{-1}(\sqrt{1-\alpha})}{\sigma[\Phi^{-1}(\sqrt{\beta})-\Phi^{-1}(\sqrt{1-\alpha})}\tag{28}$$

$$n=\frac{\sigma^2}{(\mu_0-\mu_1)^2}[\Phi^{-1}(\sqrt{\beta})-\Phi^{-1}(\sqrt{1-\alpha})]^2+\frac{1}{2}[\Phi^{-1}(\sqrt{1-\alpha})]^2$$

上述抽样方案的抽检特性函数为

$$L(\mu)=P\{\bar{X}-ts_1\leqslant\mu_0,\ \bar{Y}-ts_2\leqslant\mu_0\}$$
$$=\Phi^2\left(\frac{\mu_0-(t\sigma)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{t^2}{2(n-1)}}}\right)$$

其中$t$值由（28）式确定，$\sigma$未知可由以往的检验数据给出其估计值。

## 参　考　文　献

1　马毅林著，工业应用抽样检验方法，北京，机械工业出版社，1983年

# A kind of Bivria Measuring once Sampling plans

Han Zhilog
(Mathematics Teaching and Research Section)

**Abstract:** Now one dimensional sampling plans is studied mostly. For the Situation of totality obeying bivariate normal distribution, the paper gives bivariate measuring once Sampling plans, and the oc—function has been worked out. The plans find extensive applications in solving practical problems, so the study of this paper has importent value both in theoretical research practical application.

**Keywords:** bivariate Sampling plans, OC—function, accept probability