第16卷 第3期　　郑州工学院学报　　Vol.16 No.3
1995年 9 月　　Journal of Zhengzhou Institute of Technology　　Sep. 1995

特征重根型变系数线性齐次微分方程的降阶求解方法*

孟令保

(沈阳化工学院)

摘　要: 本文主要解决了具有特征重根型的变系数线性齐次微分方程的两个问题: ①该类方程若有 Y 重特征根，则该类方程便可一次降价为 n Y 阶方程，推广了常系数线方程[1]的降阶原理。②该类型方程可在事先不知道任何特征的前提下，就可以求其某些特解。

关键词: 线性微分方程，特征方程根，特解，通解
中图分类号: O241

1　问题的提出

文献[1]讨论了常系数线性齐次微分方程

$$P_0 y + P_1 y' + \cdots + P_n y^{(n)} = 0 \tag{1}$$

的降阶法，给出了方程(1)的特征方程　$P_0 + P_1 \alpha + \cdots + P_n \alpha^n = 0$

具有 r 重根时，方程(1)可一次降阶为 n−r 阶方程(1<r<n)。

其实当方程(1)中的常系数 P_i 推广为某类变系数 $P_i(x)$时($i=0, 1, \cdots, n$)，[1]中的结论仍成立。该类方程型如下:

$$P_0(x) y + P_1(x) y' + \cdots + P_n y^{(n)} = 0 \tag{2}$$

其中$P_i(x) = a_{i0} + a_{i1} x + a_{i2} x^2 + \cdots + a_{im} x^m \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$

2　降阶法一般讨论

首先将方程(2)重新整理成为　$\sum_{j=0}^{m} x_j(y) = 0$　(3)

---

* 收稿日期: 1994-11-01

方程(3)与(2)同解。以下提到(3)的解便是(2)的解。其中

$L_j(y)=a_{0j}y+a_{1j}y'+\cdots+a_{nj}y^{(n)}\qquad(j=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$

若令　$L_j(y)=0,\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ m$　　(4)

则(4)为 m 个线性的常系数微分方程，而常系数线性方程总可以用特征方程求根法求出解。

命题1: 若 y_0 是 $L_j(y)=0\quad(j=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$ 的一个公共解，则 y_0 也是方程(3)的一个解。

证明　因为 y_0 是 $L_j(y)=0\quad(j=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$ 的一个公共解，则有

$$L_j(y_0)\equiv 0\qquad(j=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$$

将其代入方程(3)，有　$\sum_{j=0}^{m}x^jL_j(y_0)\equiv 0$

所以 y_0 是方程(3)的一个解。

命题2: 若 $y_1,\ \cdots,\ y_r$ 是 $L_j(y)=0\quad(j=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$ 的一组公共解，则 $y_1,\ \cdots,\ y_r$ 也是(3)的一组解。

证明思想同命题1，这里从略。

命题3: 若 K 为 $L_j(y)=0$ 的特征方程 $\varphi_j(\alpha)=0,\ (j=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$ 的 r 重公根 $(1\leqslant r\leqslant n)$，则方程(3)可一次降阶为 $n-r$ 阶方程。

证　记 $\frac{d}{dx}=D$，则方程(3)为　$[\sum_{j=0}^{m}x^j\varphi_{j(D)}](y)=0$　　(5)

由于 K 为特征方程 $\varphi_j(\alpha)=0\ (j=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$ 的公根，根据文献[2]知方程(3)具有 $y=e^{kx}$ 型解。于是作变换，设　$y=e^{kx}z$

代入方程(5)，得　$e^{kx}[\sum_{j=0}^{m}x^j\varphi_j(D+k)](z)=0$

两端同除 e^{kx} 后得　$[\sum_{j=0}^{m}x^j\varphi_j(D+k)](z)=0$　　(6)

对于(6)中的 $\varphi_j(D+k)\quad(j=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$ 运用 $D=0$ 处的泰勒展开式，得到

$$[\sum_{j=0}^{m}(x^j\sum_{i=0}^{m}\frac{\varphi_j^{(i)}(k)}{i!}D^i)](z)=0\tag{7}$$

又由于 K 为 k 的 $\varphi_j(\alpha)=0\quad(j=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$ 的 r 重公根，则由多项式性质有

$$\varphi_j(k)=\varphi'_j(k)=\cdots=\varphi_j'^{(r-1)}\equiv 0\quad(j=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$$

这时(7)化作　$[\sum_{j=0}^{m}(x^j\sum_{i=r}^{m}\frac{\varphi_j^{(i)}(k)}{i!}D^i)](z)=0$

即　$$\sum_{j=0}^{m}(x^j\sum_{i=r}^{m}\frac{\varphi_j^{(i)}(k)}{i!}z^{(i)}=0\tag{8}$$

再设$z^{(r)}=t$，代入(8)式得 $$\sum_{j=0}^{m}(x^j\sum_{i=r}^{m}\frac{\varphi_j^{(i)}(k)}{i!}t^{(i-r)}]=0 \quad (9)$$

(9)式即为关于t的$n-r$阶方程。 证完。

系1: 若k为$L_j(y)=0$特征方程$\varphi_j(\alpha)=0$的$n-1$重公根时，方程(3)的通解可求。

证 当k为$n-1$重特征公根时，(8)式中的$r=n-1$，即

$$\sum_{j=0}^{m}(x^j\sum_{i=n-1}^{m}\frac{\varphi_j^{(i)}(k)}{i!}t^{(i-n+1)}]=0$$

即关于t的一阶线性齐次方程

$$\frac{1}{(n-1)!}(\sum_{j=0}^{m}\varphi_j^{(n-1)}(k)x^j)t+\frac{1}{n!}(\sum_{j=0}^{m}\varphi_j^{(n)}(k)x^j)t'=0 \quad (10)$$

记这个方程(9)的通解为$t_0=t_0(x, C_1)$，则方程(3)的通解为

$$y=e^{kx}Z=e^{kx}\underbrace{\int\cdots\int}_{n-1}t_0(x, C_1)dx\cdots dx$$ 证完.

系2: 若k为$L_j(y)=0$特征方程$\varphi_j(\alpha)=0$ $(j=0, 1, \cdots, m)$的n重公根时，方程(3)化为常系数线性齐次方程。其通解为

$$y=e^{kx}\underbrace{\int\cdots\int}_{n}0\cdot dx\cdots dx$$

证 作变换$y=e^{kx}z$，注意到k是n重特征公根，(8)式化作

$$(\sum_{j=0}^{m}x^j\frac{\varphi_j^{(n)}(k)}{n!})z^{(n)}=0$$

即 $z^{(n)}=0$

则 $z=\underbrace{\int\cdots\int}_{n}0\cdot dx\cdots dx$

因此 $y=e^{kx}\underbrace{\int\cdots\int}_{n}0\cdot dx\cdots dx$

另，当k是$\varphi_j(\alpha)=0$ $(j=0, 1, \cdots, m)$的n重公根时，那么对于$\varphi_j(\alpha)$ $(j=0, 1, \cdots, m)$是相同的多项式，即这些多项式的系数均相同，亦即化为同一个多项式，这时$L_1(y)=L_2(y)=\cdots L_m(y)$，于是(3)为

$$(\sum_{j=1}^{m}x^j)L_1(y)=0 \quad (11)$$

因为$\sum_{j=1}^{m}x^j=1+x+x^2+\cdots+x^m\neq 0$ $(1, x, x^2, \cdots x^m$线性无关)

那么(11)可化作常系数线性方程

$$L_1(y)=a_0y+a_1y'+\cdots+a_ny'^{(n)}=0$$ 证完

3 举例

例子：求方程 $(x+1)y'''+2xy''+(x-3)y'-2y=0$的通解

解　将方程重新整理为　$(y'''-3y'-2y)+x(y'''+2y''+y')=0$

令 $\begin{cases} y'''-3y'-2y=0 \\ y'''+2y''+y'=0 \end{cases}$

设$y=e^{\alpha x}$，得特征方程　$\begin{cases} \alpha^3-3\alpha-2=0 \\ \alpha^3+2\alpha^2+\alpha=0 \end{cases}$

计算得出这两个特征方程有公根$\alpha=-1$且为二重根，则方程在变换$y=e^{-x}z$下，降为关于z''的一阶线性方程　$(x+1)z'''-(x+3)z''=0$

那么　$z''=e^{\int\frac{x+3}{x+2}dx}=ce^x(x+1)^2$　积分二次，

$$z=\iint ce^x(x+1)^2dxdx=c[(x^2-2x+3)e^x+\tilde{c}_1x+\tilde{c}_2]=c(x^2-2x+3)e^x+c_1x+c_2 \quad (c_1=\tilde{c}_1c,\ c_2=\tilde{c}_2c)$$

所以原方程通解为　$y=e^{-x}z=e^{-x}[c(x^2-2x+3)e^x+c_1x+c_2]$

$$=c(x^2-2x+3)+c_1xe^{-x}+c_2e^{-x}$$

值得注意的是，这类方程是变系数方程，在不知任何特解时，便会求出解。一般的变系数方程不一定具备这个特性。

参　考　文　献

1　孟令保.常系数线性方程通解的降阶法.沈阳化工学院学报.1990.3

2　刘赐臣.线性齐次微分方程的e^{kx}型解.数学通报.1994.3

3　中山大学数学系编.常微分方程.人民教育出版社.

The Derorgafory Solving Method of Homogeneous Linear Differential Equation with Variable Coefficient and CharacteristicRepeated Roots

Meng Lingbao

(Shenyang Institute of Chemical Technology)

Abstract: The article has mainly solved two problems about homogeneous linear differential equation with variable coefficients and haracteristic repeated roots. (1)If this kind of equation has repeated characteristic roots, the equation can be derogated once as that of order (r−n). And the derended. (2)Under the circumstance that any special solution is unknown, some special solutions of equation can be searched.

Keywords: Linear differential equation; Root of characteristic equation; Sowcial solution; General solution