

弯扭疲劳极限条件——椭圆弧线方程 在一般复杂应力下的推广*

杜云海

(郑州工学院数理力学系)

摘 要: 本文用与[1]相同的几何方法, 由弯扭复合应力下的疲劳规律——椭圆弧线方程推广得到二向及三向主变应力下的疲劳条件。传统的最大应力、最大线应变强度理论都是所导出结果的特殊情况。

关键词: 疲劳极限, 复杂应力

中图分类号: O346

高夫(Gough)、莎斯屯(Thurston)和佛尔德(Field)对不同材料的弯扭疲劳试验结果表明, 四分之一椭圆(ellipse quadrant)和椭圆弧线(ellipse arc)是用来表征弯扭疲劳规律两种十分有效的疲劳极限条件^[2], 将这些受到试验支持的规律加以推广, 导得一般复杂应力下的疲劳规律, 具有一定的实践基础。作者在文[1]中已用几何方法由弯扭复合应力下椭圆方程导出了一种复杂应力下的疲劳极限条件, 这个条件包含了应变能强度理论。作为一种并列的结果, 本文继[1]文之后, 再由弯扭复合应力下的椭圆弧线方程导出又一个一般复杂应力下的疲劳极限条件, 从下面的研究将会看出, 它可以实现不同传统强度理论间的过渡, 因而更具一般性。

本文的讨论仍限于对称循环下诸应力分量的同相变化, 采用的符号与[1]文相同。

1 椭圆弧线的推广

脆性材料光滑试样及塑性材料切口试样弯扭复合应力疲劳极限所遵从的规律——椭圆弧线方程为

$$\left(\frac{\tau}{\tau_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_{-1}}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} - 1\right) + \frac{\sigma}{\sigma_{-1}} \left(2 - \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right) = 1 \quad (1)$$

其中, σ 、 τ 分别为对称循环下弯曲正应力和扭转剪应力复合时的持久极限。在由式(1)推广导出一般复杂应力下的疲劳极限条件时, 首先考虑一般平面应力情形。

* 收稿日期: 1994-12-23

1.1 一般平面应力情况

在一般平面应力情况下, 由式(1)可得疲劳极限曲面与坐标平面 $\sigma_y=0$ 和 $\sigma_x=0$ 的两条交线方程

$$\left(\frac{\tau_{xy}}{\tau_{-1}}\right)^2 \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{-1}}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} - 1\right) + \frac{\sigma_x}{\sigma_{-1}} \left(2 - \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right) = 1 \quad (2)$$

$$\left(\frac{\tau_{xy}}{\tau_{-1}}\right)^2 \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_{-1}}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} - 1\right) + \frac{\sigma_y}{\sigma_{-1}} \left(2 - \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right) = 1 \quad (3)$$

假定在一般情况下, 各应力分量持久极限遵从二次曲面

$$A_{11}\sigma_x^2 + A_{22}\sigma_y^2 + A_{33}\tau_{xy}^2 + A_{12}\sigma_x\sigma_y + A_{23}\sigma_y\tau_{xy} + A_{31}\tau_{xy}\sigma_x + B_1\sigma_x + B_2\sigma_y + B_3\tau_{xy} + C = 0 \quad (4)$$

在式(4)中分别令 $\sigma_y=0$ 和 $\sigma_x=0$, 得

$$A_{11}\sigma_x^2 + A_{33}\tau_{xy}^2 + A_{31}\tau_{xy}\sigma_x + B_1\sigma_x + B_3\tau_{xy} + C = 0 \quad (5)$$

$$A_{22}\sigma_y^2 + A_{33}\tau_{xy}^2 + A_{23}\sigma_y\tau_{xy} + B_2\sigma_y + B_3\tau_{xy} + C = 0 \quad (6)$$

式(5)、(6)分别与式(2)、(3)比较系数可知

$$A_{11} = A_{22} = \frac{1}{\sigma_{-1}^2} \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} - 1 \right), \quad A_{33} = \frac{1}{\tau_{-1}^2}$$

$$A_{31} = A_{23} = B_3 = 0, \quad B_1 = B_2 = \frac{1}{\sigma_{-1}} \left(2 - \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} \right), \quad C = -1$$

将以上各系数代入式(4), 并将纯剪应力状态 $(0, 0, \tau_{-1})$ 转变为二向应力状态 $(\tau_{-1}, \tau_{-1}, 0)$ 代入式(4), 或者将单向应力状态 $(\sigma_{-1}, 0, 0)$ 转变为一般平面应力状态 $(\frac{\sigma_{-1}}{2}, \frac{\sigma_{-1}}{2}, \frac{\sigma_{-1}}{2})$ 代入式(4), 均可定出另外一个待定系数

$$A_{12} = \frac{2}{\sigma_{-1}^2} \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} - 1 \right) - \frac{1}{\tau_{-1}^2}$$

于是得到一般平面应力情况下的疲劳极限条件为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma_{-1}^2} \left(\frac{1}{R} - 1 \right) (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \frac{\tau_{xy}^2}{\tau_{-1}^2} + \left[\frac{2}{\sigma_{-1}^2} \left(\frac{1}{R} - 1 \right) - \frac{1}{\tau_{-1}^2} \right] \sigma_x \sigma_y \\ & + \frac{1}{\sigma_{-1}} \left(2 - \frac{1}{R} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 1 \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $R = \tau_{-1} / \sigma_{-1}$, 它在 $0-\sigma_x-\sigma_y-\tau_{xy}$ 坐标系中的几何图形, 为以 $\sigma_x = \sigma_y$ 为对称轴的椭圆锥面, 如图1所示。

1.2 二向应力情况

二向应力下的疲劳极限条件可在式(7)中令 $\tau_{xy}=0$, 并以 σ_1 、 σ_2 代替 σ_x 、 σ_y 获得, 经整理后的结果为

$$\frac{1}{\sigma_{-1}^2} \left(\frac{1}{R} - 1 \right) (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \frac{1}{\tau_{-1}^2} \sigma_1 \sigma_2 + \frac{1}{\sigma_{-1}} \left(2 - \frac{1}{R} \right) (\sigma_1 + \sigma_2) = 1 \quad (8)$$

式(8)经因式分解可得两个直线方程,若约定 σ_1 为较大应力幅, $\sigma_1 > \sigma_2$,则可用一个方程表示二向应力下的疲劳极限条件为

$$\sigma_1 + \left(1 - \frac{1}{R} \right) \sigma_2 = \sigma_{-1} \quad (9)$$

如果是 $\sigma_2 > \sigma_1$,只要在式(9)中交换 σ_1 、 σ_2 的位置即可。

二向应力下疲劳极限曲线在 $0-\sigma_1-\sigma_2$ 坐标系中的几何图形为以 $\sigma_1 = \sigma_2$ 和 $\sigma_1 = -\sigma_2$ 为对称轴的菱形。

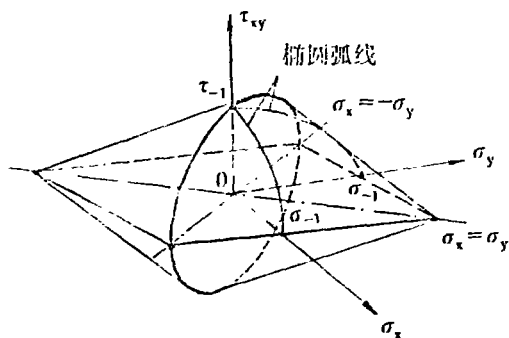


图1 一般平面应力下的疲劳极限曲面

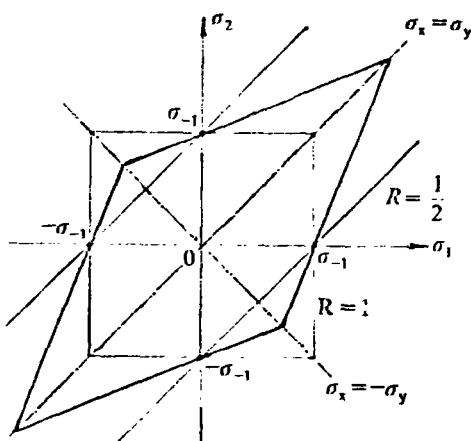


图2 二向应力下的疲劳极限曲线

1.3 三向应力情况

在三向应力情况下,若约定 $\sigma_1 > \sigma_2, \sigma_3$,由式(9)有

$$\sigma_1 + \left(1 - \frac{1}{R} \right) \sigma_2 = \sigma_{-1} \quad (10)$$

$$\sigma_1 + \left(1 - \frac{1}{R} \right) \sigma_3 = \sigma_{-1} \quad (11)$$

此为三向应力下疲劳极限曲面与坐标平面 $\sigma_3 = 0$ 和 $\sigma_2 = 0$ 的两条交线。设这种情况下疲劳极限遵从方程

$$A\sigma_1 + B\sigma_2 + C\sigma_3 + D = 0 \quad (12)$$

在式(12)中分别令 $\sigma_3 = 0$ 和 $\sigma_2 = 0$,有

$$A\sigma_1 + B\sigma_2 + D = 0 \quad (13)$$

$$A\sigma_1 + C\sigma_3 + D = 0 \quad (14)$$

式(13)、(14)与式(10)、(11)比较知

$$A = 1, \quad B = C = 1 - \frac{1}{R}, \quad D = -\sigma_{-1}$$

因而三向应力下疲劳极限曲面的具体形式为

$$\sigma_1 + (1 - \frac{1}{R})(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{-1} \quad (15)$$

σ_1 、 σ_2 、 σ_3 轮换, 可得 σ_2 、 σ_3 为较大应力幅时的疲劳极限曲面为

$$\sigma_2 + (1 - \frac{1}{R})(\sigma_3 + \sigma_1) = \sigma_{-1} \quad (16)$$

$$\sigma_3 + (1 - \frac{1}{R})(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_{-1} \quad (17)$$

由式(15)~(17)给出的三向应力下的疲劳极限曲面构成 $0-\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3$ 坐标系中的六面体, 如图3所示。

2 讨论及实验比较

2.1 讨论

2.1.1 二向及三向应力下的导出结果, 式(9)和式(15)包含了适用于脆性材料的诸种传统理论, 随着材料弯扭疲劳极限比的不同, 导出结果实现了传统强度理论间的过渡。例如, 取 $R=1$, 由式(9)、式(15)都得到 $\sigma_1 = \sigma_{-1}$, 这就是最大应力理论; 取

$R = \frac{1}{1+\mu}$, 又可得到 $\sigma_1 - \mu\sigma_2 = \sigma_{-1}$ 和 $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{-1}$, 这便是最大线应变理论; 取 $R = \frac{1}{2}$, 由式(9)得到 $\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_{-1}$, 在 σ_1 与 σ_2 反号时, 与最大剪应力理论一致。

2.1.2 由二向应力下导出的结果(图2), 考虑到材料的 R 值是处于 $\frac{1}{2} \sim 1$ 之间的, 而由 $R = \frac{1}{2}$ 和 $R=1$ 时的疲劳极限曲线恰好构成最大剪应力理论的六边形, 按照本文结果推测, 任何材料的二向应力疲劳试验结果不会落入该六边形之内, 因而最大剪应力理论是一种偏保守的理论, 可适用于任何材料。

2.2 实验比较

为了能与实验结果比较, 这里将高夫对一些材料所做的弯扭疲劳试验结果^[2]换算成主变应力, 绘入图4, 但这只能对二向应力下推广结果进行部分验证(σ_1 、 σ_2 反号情况)。由图4看出, 推广结果基本体现了各种材料疲劳极限的变化趋势。对二向应力下 σ_1 与 σ_2 同号及三向应力情况, 尚缺乏可资比较的实验资料, 因而有待于进一步验证。

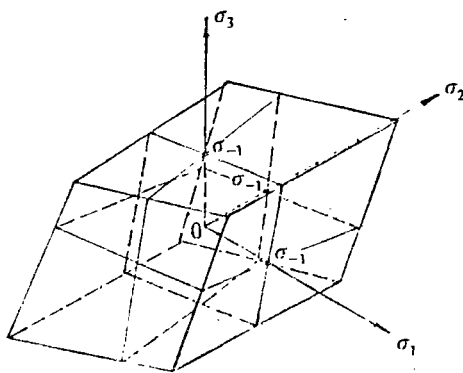


图3 三向应力下的疲劳极限曲面

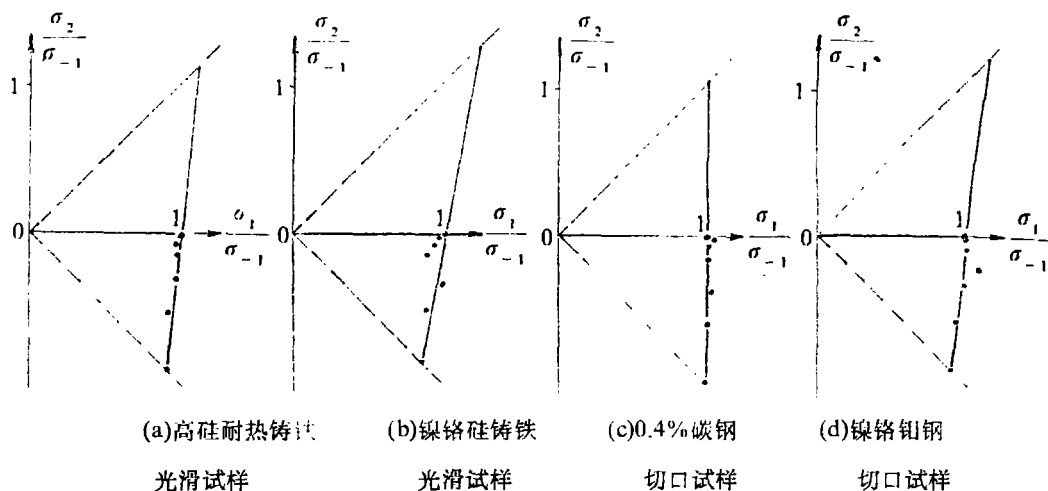


图 4 疲劳极限曲线与实验的比较

3 结语

本文用几何方法,由适于表达脆性材料光滑试样及塑性、脆性材料切口试样弯扭疲劳极限变化规律的椭圆弧线方程,导出了一种二向及三向主变应力下的疲劳极限条件,这一结果中隐含了最大应力强度理论和最大线应变强度理论,因而比传统理论更具一般性,本文结果与文[1]结果有着共同的优点,即随着不同材料有不同扭弯疲劳极限比 R ,疲劳极限曲线(或曲面)的形态也有所变化。文[1]由椭圆方程导出的疲劳极限条件和本文由椭圆弧线方程导出的疲劳极限条件,作为二种并列结果,可供表达材料疲劳极限规律时参考。

参 考 文 献

- 1 杜云海. Gough疲劳极限条件在一般复杂应力下的推广. 郑州工学院学报. Vol. 13 No.3
- 2 J. A. Pope. Metal Fatigue. London. Chapman & Hall. 1959

Extending of Ellipse Arc Law under General Complex Stress

Du Yunhai

(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: This paper popularizes the Ellipse Arc law under the combined bending and torsion fatigue to biaxial and tri-axial stress systems, in the geometrical method. The result show the maximum stress theory and the maximum strain theory are it's the exceptional cases.

Keywords: fatigue limit, complex stress