

# 粘性土坡稳定性的变分分析\*

刘忠玉

(郑州工学院)

**摘 要:** 本文将粘性土坡的稳定性问题等价于一个单参变量函数的待定边界的泛函的变分问题。利用变分法, 推导了滑裂面所应满足的微分方程(欧拉方程)和横截性条件。本文方法可确定滑裂面形状函数和安全系数。作为特例, 本文讨论了简单土坡所可能出现的滑裂面形状, 以及临界状态时的土坡的各种参数所应满足的条件, 从而可确定临界坡高或临界坡度。

**关键词:** 粘性土坡稳定性, 安全系数, 滑裂面形状, 临界坡高

**中图分类号:** TU431

在工程实践中, 常常会遇到路堤或基坑开挖时的边坡稳定性问题, 而其稳定安全度一般用稳定安全系数  $F_s$  表示。对粘性土坡来说, 一般是用条分法来试算安全系数的。但往往需先假设一系列滑裂面, 而其形状的确定却是一个不定因素。实际应用时, 常常简单地假定为圆弧型或折线型等。而事实上却并非如此, 甚至滑裂面与土坡面的交线(点)也是不定的。文献<sup>[1][4]</sup>曾对理想粘性土( $\psi=0$ )给出了滑裂面形状以及相应安全系数的算法。本文试图考虑一般的情况, 即粘性土( $c \neq 0, \psi \neq 0$ )坡的稳定性问题。

为简单起见, 本文假设土坡为平面应变问题, 且土质均匀, 并引入费伦纽斯(Fellenius)假定, 即不考虑微元条两侧的条间力, 推导了安全系数公式, 然后将它等价于一个边界待定的泛函问题, 利用变分原理, 得到相应欧拉方程和横截性条件, 考虑边界条件后, 就可得到滑裂面形状函数  $z(x)$ , 以及相对应安全系数  $F_s$ 。最后, 作为特例, 对简单土坡, 本文讨论了四种可能出现的滑裂面形状, 得到了相对应临界状态时土坡体的内摩擦角  $\psi$ , 粘聚力  $c$ , 土的重度  $\gamma$ , 坡高  $h$ , 坡度  $k$  等参数所应满足的条件, 从而可得到临界坡高  $h_{cr}$  和临界坡度  $k_{cr}$ 。

---

\* 收稿日期: 1994-11-29

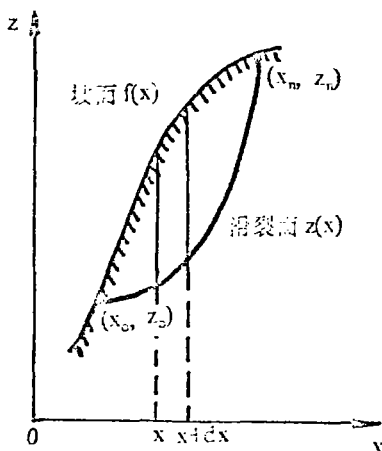
# 1 安全系数的推导

设坡面函数为  $f(x)$ , 滑裂面形状函数为  $z(x)$ , 二者交点为  $(x_0, z_0)$ ,  $(x_n, z_n)$  (图 1a). 从滑坡体任选一微元条 (图 1b), 在不考虑条间力时, 微元条上作用以下几种力

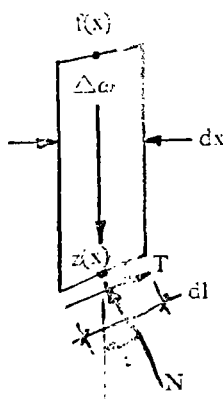
$$\text{重力 } \Delta\omega = (f - z) \cdot \gamma \cdot dx \quad (1a)$$

$$\text{正压力 } N = \sigma \cdot dl \quad (1b)$$

$$\text{剪切力 } T = \tau \cdot dl \quad (1c)$$



(a) 滑坡体



(b) 微元条受力分析

图 1 滑坡体与微元条

这里  $\sigma$ 、 $\tau$  为滑裂面上点  $(x, z)$  处正应力与剪应力,  $dl$  为微元条底部长度, 且  $dl = \sqrt{1 + z'(x)} dx$ . 设微元条底部切线与  $x$  轴夹角为  $\alpha$ . 则

$$\sin\alpha = \frac{z'}{\sqrt{1 + z'^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2}} \quad (2)$$

考虑微元条的力平衡以及对坐标原点的力矩平衡, 并化简得:

$$N = \Delta\omega \cdot \cos\alpha = (f - z)\gamma dx \cos\alpha \quad (3)$$

$$\Delta\omega = T F_s \sin\alpha + N \cos\alpha \quad (4)$$

再根据摩尔-库仑准则:

$$\tau_f = c + \sigma \tan\psi \quad (5)$$

以及安全系数定义:

$$F_s = \frac{\tau_f}{\tau} \quad (6)$$

可得

$$T = \frac{1}{F_s} (c dl + N \tan\psi) \quad (7)$$

将相应各式代入(4)式, 化简可得:

$$\gamma(f-z)z'dx = \frac{1}{F_s} [c(1+z'^2) + \gamma(f-z)tg\psi]dx$$

当我们取遍所有微元条时, 就有:

$$\int_{x_0}^{x_n} \gamma(f-z)z'dx = \frac{1}{F_s} \int_{x_0}^{x_n} [c(1+z'^2) + \gamma(f-z)tg\psi]dx \quad (8)$$

从而可得到安全系数公式:

$$F_s = \frac{I(z, z'; x)}{J(z, z'; x)} \quad (9)$$

式中

$$I(z, z'; x) = \int_{x_0}^{x_n} [c(1+z'^2) + \gamma(f-z)tg\psi]dx \quad (10.a)$$

$$J(z, z'; x) = \int_{x_0}^{x_n} \gamma(f-z)z'dx \quad (10.b)$$

## 2 欧拉方程与横截性条件

我们从式(9)可看出, 对于给定的土坡, 只要能确定滑裂面形状  $z(x)$  以及交点  $(x_0, z_0)$ 、 $(x_n, z_n)$ , 我们就可以求出对应安全系数。但是, 一般情况下,  $z(x)$ ,  $x_0$ ,  $x_n$  都是未知的, 因此我们可把  $F_s$  看作一个边界  $x_0$ ,  $x_n$  待定的泛函。土坡最小的安全系数即对应着泛函  $F_s(z, z'; x)$  的极小值。由变分原理<sup>(2)</sup>, 泛函  $F_s(z, z'; x)$  等价于下述泛函:

$$\Pi(z, z'; x) = I - F_s J = \int_{x_0}^{x_n} F(x, z, z')dx \quad (11)$$

$$\text{式中 } F(x, z, z') = c(1+z'^2) + \gamma(f-z)tg\psi - F_s \gamma(f-z)z' \quad (12)$$

对(11)式变分且考虑到  $(x_0, z_0)$ ,  $(x_n, z_n)$  在曲线  $f(x)$  上滑动, 则

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \int_{x_0}^{x_n} \left[ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial z'} \right) \right] \delta z dx + \left[ F + \frac{\partial F}{\partial z'} f' - z' \frac{\partial F}{\partial z'} \right]_{x=x_n} \delta x_n \\ & - \left[ F + \frac{\partial F}{\partial z'} f' - z' \frac{\partial F}{\partial z'} \right]_{x=x_0} \delta x_0 \end{aligned} \quad (13)$$

由  $\delta z$ ,  $\delta x_0$ ,  $\delta x_n$  的任意性可得欧拉方程:

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial z'} \right) = 0 \quad (14)$$

以及横截性条件:

$$F + \frac{\partial F}{\partial z'} f' - z' \frac{\partial F}{\partial z'} = 0, \quad x = x_0, x_n \quad (15)$$

只有在边界条件

$$z(x_i) = z_i = f(x_i), \quad i = 0, n \quad (16)$$

和横截性条件 (15) 满足时, 泛函  $\Pi$  的极值问题才有充要条件的解。

将 (12) 式代入式 (14)、(15) 可得滑裂面所需满足的欧拉方程为:

$$2cz'' = -\gamma tg\psi + F_s \gamma f' \quad (17)$$

横截性条件:

$$z'^2(x_i) - 2z'(x_i)f'(x_i) - 1 = 0, \quad i = 0, n \quad (18)$$

边界条件仍如 (16) 式。

如果  $f'(x)$  分段连续, 还应在分段点  $x_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$  上满足连续性条件:

$$z(x_i^-) = z(x_i^+) \quad (19a)$$

$$z'(x_i^-) = z'(x_i^+), \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (19b)$$

以上各式若令  $\psi = 0$ , 即为文献<sup>[1]</sup>的结果。

很明显, 对于一个确定的土坡, 只要我们能解出欧拉方程 (17) 的解  $z(x, F_s)$  代入安全系数公式 (9), 即得到一个关于  $F_s$  的方程, 求解之, 其最小的正解即为该土坡的安全系数, 相对应  $z(x, F_s)$  即为真正的潜在滑裂面。

### 3 简单土坡

简单土坡, 即坡顶与坡底都水平的土坡:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ kx, & 0 < x \leq x_2 \\ h, & x > x_2 \end{cases} \quad (20)$$

式中  $k$  为坡度。坡高  $h = kx_2$  (图2)。

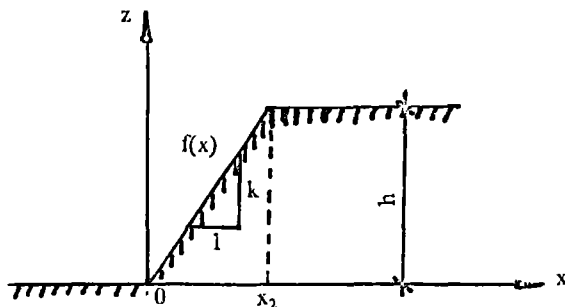


图2 简单土坡

对于简单均质砂性土坡, 即  $c = 0$ , 由欧拉方程 (17), 可得

$$F_s = \frac{tg\psi}{k} \quad (21)$$

上式即为一般教材中砂性土坡的安全系数公式。当  $c \neq 0$ ,  $\psi \neq 0$  时简单土坡可能的滑裂面

如图3中的四种情况: (a) 坡面滑动型; (b) 坡顶滑动型; (c) 底坡滑动型; (d) 一般滑动型。下面, 我们对此进行讨论。

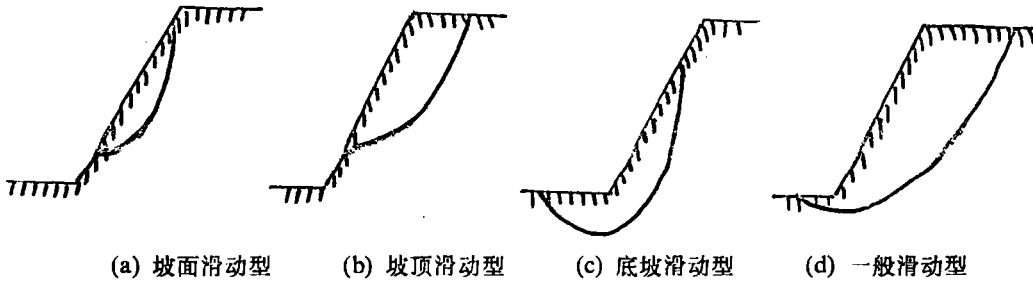


图3 简单土坡可能滑动类型

情况a, 坡面滑动型:

此时坡面函数  $f(x) = kx$ , 求解欧拉方程可得:

$$z(x) = \frac{1}{2}d_1x^2 + d_2x + d_3 \quad (22)$$

$$\text{式中 } d_1 = \frac{\gamma}{2c}(F_s k - tg\psi) \quad (23a)$$

$$d_2 = k - \sqrt{k^2 + 1} - d_1x_0 \quad (23b)$$

$$d_3 = \frac{1}{2}d_1x_0^2 + \sqrt{k^2 + 1}x_0 \quad (23c)$$

$$\text{且 } x_n = x_0 + \frac{2}{d_1}\sqrt{k^2 + 1} \quad (24)$$

很明显, 要形成此类滑动面, 需

$$h \geq (x_n - x_0)k \quad (25)$$

上式取等号时为正好可能形成, 从而安全系数为:

$$F_s = \frac{tg\psi}{k} + \frac{4c\sqrt{k^2 + 1}}{h \cdot \gamma} \quad (26)$$

临界状态时,  $F_s = 1$ , 从而土坡各参数所应满足的条件为:

$$h\gamma(k - tg\psi) = 4ck\sqrt{k^2 + 1} \quad (27)$$

当  $c, \psi, \gamma, k$  一定时, 上式可求得临界坡高  $h_{cr1}$ ; 当  $c, \psi, \gamma, h$  一定时, 上式可求得临界坡度  $k_{cr1}$ 。

情况b, 坡顶滑动型:

此时, 滑裂面形状函数为:

$$z(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}d_1(x+x_2)^2 + d_2(x+x_2) + d_3, & x_0 \leq x < x_2 \\ \frac{1}{2}(c_1(x+x_2)^2 + d_2(x+x_2) + d_3), & x_2 \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (28)$$

$$\text{式中 } c_1 = -\frac{\gamma}{2c}tg\psi \quad (29)$$

$$x_0 = \frac{-F_s k + F_s \sqrt{k^2 + 1} + tg\psi \pm \sqrt{F_s^2 + tg^2\psi}}{\frac{\gamma}{2c}(F_s tg\psi - F_s^2 k)} + x_2 \quad (30a)$$

$$x_n = \frac{2c}{\gamma F_s tg\psi} [-F_s + tg\psi \pm \sqrt{F_s^2 + tg^2\psi}] + x_2 \quad (30b)$$

式中“+”, “-”号取法应使  $x_0 \leq x_2$ ,  $x_n \geq x_2$ 。与情况 a 同样的考虑, 由  $|x_2 - x_0|k = h$ , 可得安全系数方程:

$$\frac{h}{k} + \frac{-F_s k + F_s \sqrt{k^2 + 1} + tg\psi \pm \sqrt{F_s^2 + tg^2\psi}}{\frac{\gamma}{2c}(F_s tg\psi - F_s^2 k)} = 0 \quad (31)$$

临界状态时, 土坡各参数所应满足的条件是

$$\frac{h}{k} + \frac{-k + \sqrt{k^2 + 1} + tg\psi \pm \sqrt{tg^2\psi + 1}}{\frac{\gamma}{2c}(tg\psi - k)} = 0 \quad (32)$$

由上式即可求得临界坡高  $h_{cr2}$  或临界坡度  $k_{cr2}$ 。

情况 c, 底坡滑动型:

此时滑裂面形状应为:

$$z(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}c_1 x^2 + a_2 x + a_3, & x_0 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2}d_1 x^2 + a_2 x + a_3, & x < x_0 \leq x_n \end{cases} \quad (33)$$

$$\text{式中 } a_2 = -1 - a_1 x_0 \quad (34a)$$

$$a_3 = x_0 + \frac{1}{2}a_1 x_0^2 \quad (34b)$$

$$x_0 = \frac{2c}{F_s \gamma tg\psi} [tg\psi + F_s + \sqrt{F_s^2 + tg^2\psi}] \quad (35a)$$

$$x_n = \frac{-tg\psi + F_s k + F_s \sqrt{k^2 + 1} \pm \sqrt{F_s^2 + tg^2\psi}}{\frac{\gamma}{2c}(F_s^2 k - F_s tg\psi)} \quad (35b)$$

上式中“+”, “-”号取法应使  $x_0 \leq 0$ ,  $x_n \geq 0$ , 此时安全系数方程为

$$\frac{-tg\psi + F_s k + F_s \sqrt{k^2 + 1} \pm \sqrt{F_s^2 + tg^2\psi}}{\frac{\gamma}{2c}(F_s^2 k - F_s tg\psi)} - \frac{h}{k} = 0 \quad (36)$$

临界状态时, 土坡各参数应满足:

$$\frac{h}{k} = \frac{-tg\psi + k + \sqrt{k^2 + 1} \pm \sqrt{1 + tg^2\psi}}{\frac{\gamma}{2c}(k - tg\psi)} \quad (37)$$

由上式可求得临界坡高  $h_{cr3}$  或临界坡度  $k_{cr3}$ 。

情况d, 一般滑动型:

此时滑裂面形状函数为:

$$z(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}c_1 x^2 + a_2 x + a_3, & x_o \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2}d_1 x^2 + a_2 x + a_3, & x < x \leq x_2 \\ \frac{1}{2}c_1 x^2 + e_2 x + e_3, & x_2 \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (38)$$

$$\text{式中} \quad e_2 = (d_1 - c_1)x_2 - 1 - c_1 x_o \quad (39a)$$

$$e_3 = \frac{1}{2}(d_1 - c_1)x_2^2 + x_o + \frac{1}{2}c_1 x_o^2 \quad (39b)$$

$$x_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{F_s k}{tg\psi}\right)x_2 - \frac{2c}{\gamma tg\psi} + \frac{2c}{\gamma F_s} \quad (40a)$$

$$x_o = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{F_s k}{tg\psi}\right)x_2 + \frac{2c}{\gamma tg\psi} + \frac{2c}{\gamma F_s} \quad (40b)$$

安全系数方程为:

$$-\frac{\gamma^2 k^3 x_2^2 F_s^2}{48ctg\psi} + \frac{\gamma^2 k^2 x_2^2 F_s^2}{24c} + \frac{kx_2 F_s (48c^2 - tg^2\psi \gamma^2 x_2^2)}{48ctg\psi} + \frac{ctg\psi k x_2}{F_s} - \frac{8c^2}{3tg\psi \gamma} = 0 \quad (41)$$

临界状态时, 土坡各参数应满足:

$$-\frac{\gamma^2 h^3 (tg^2\psi - 2tg\psi k + k^2)}{48ctg\psi} + \frac{ch(tg^2\psi + 1)}{tg\psi} - \frac{8c^2}{3tg\psi \gamma} = 0 \quad (42)$$

从上式可得到临界坡高  $h_{cr4}$  和临界坡度  $k_{cr4}$ 。

对一个确定的土坡, 可能发生的滑裂面仅有上述四种情况之一起主导作用。因此, 按上述四种情况相应方程计算得的安全系数中, 其最小值乃是该土坡的安全系数。但是由方程可见, 安全系数的求解没有临界坡高  $h_{cr}$  的求解简单。因此, 我们可从相应方程求出  $h_{cr1}$ ,  $h_{cr2}$ ,  $h_{cr3}$ ,  $h_{cr4}$ , 其中最小值即为该土坡的临界坡高  $h_{cr}$ 。当实际坡高  $h > h_{cr}$  时, 即失稳; 当  $h < h_{cr}$  时即稳定。

而在开挖基坑时, 我们常常关心的是坡度  $k$  为多大合适。我们可从临界状态时各参数所满足的条件求出  $k_{cr1}$ ,  $k_{cr2}$ ,  $k_{cr3}$ ,  $k_{cr4}$ , 其中最小值即为该基坑边坡的临界坡度  $k_{cr}$ 。

当真实坡度  $k > k_{cr}$  时, 即失稳; 当  $k < k_{cr}$  时, 即稳定。

作为例子, 我们看如下简单边坡。  $h=8.5\text{m}$ ,  $k=0.5$ ,  $\gamma=19.6\text{kN/m}^3$ ,  $c=15\text{KPa}$ ,  $\psi=20^\circ$ 。按上述方法求得四个临界高度分别为  $15.09\text{m}$ ,  $13.8\text{m}$ ,  $15.65\text{m}$ ,  $23.73\text{m}$ , 则该土坡的临界高度为  $13.8\text{m} > 8.5\text{m}$ , 从而判定该土坡稳定。同样也可从坡度方面入手, 我们可求得四个临界坡度为  $0.831$ ,  $0.581$ ,  $0.637$ ,  $1.166$ , 则该土坡的临界坡度为  $0.581 > 0.5$ , 从而也判定该土坡稳定。该结论与文献<sup>[3]</sup>一致。

## 4 结束语

本文利用变分原理, 分析了粘性土坡的稳定性, 给出了欧拉方程和横截性条件, 从而可求得滑裂面形状函数及安全系数。对简单土坡, 我们讨论了四种可能发生的滑裂面, 并给出了安全系数方程和临界状态时土坡各参数之间的关系, 从而可求得临界坡高或临界坡度。经例子验证, 该方法是可行的。

文献<sup>[5]</sup>指出, 忽略条间力啄作用, 一般会使求得的安全系数偏低。那么按本方法计算得出的临界坡高或临界坡度估计将会偏小, 从而是偏于安全的。

## 参 考 文 献

- 1 苗天德等. 滑坡发育的灾变模型. 兰州大学学报. 1988, 24 (4)
- 2 钱伟长. 变分法及有限元. 科学出版社. 1980
- 3 洪毓康. 土质学与土力学. 人民交通出版社. 1993
- 4 Miao Tiande. The Variational Method for Three-dimensional Analysis of slope stability, Proc. IVth. Int. conf. & Field workshop of landslides, Tokyo, 1985
- 5 华东水利学院主编. 土工原理与计算 (上册). 水利电力出版社. 1982

## The Variational Analysis of Soil slope Stability

Liu Zhongyu

(Zhengzhou Institute of Technology)

**Abstract:** In this paper, the problem of soil slope stability is equivalent to a variation problem of the functional of one-variable function with a variable boundary. By applying the variational calculus, the differential equation (Euler's equation) and transversality conditions governing the critical sliding surface have been developed. The method given in the paper allows for the determination of the sliding surface shape and the safety factor. For example, the possible sliding surface shapes and the conditions satisfied by every parameter of the simple slope on critical state have been developed. Then, the critical height or critical angle of slope can be determined.

**Keywords:** the stability of soil slope, the safety factor, the sliding surface shape, the critical height of slope