第16卷 第4期 郑 州 工 学 院 学 报 Vol.16 No.4
1995年 12 月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Dec. 1995

有界可测和 L 可积函数的巴色伐尔(Parseval)等式成立的充要条件*

李凤庭

(河南教育学院数学系)

摘 要: 本文举例说明有界可测和L可积函数的巴色伐尔等式不一定成立。给出该等式成立的充要条件。

关键词: 巴色伐尔等式, 付里叶系数, 可测函数, 可积函数, 收敛

中图分类号: O174

我们知道: 若 $f(x)\in L_2[-\pi,\ \pi]$(即 $f^2(x)\in L[-\pi,\ \pi]$)时, $f(x)$的巴色伐尔等式成立[1]。

若 $f(x)\in L_2[-\pi,\ \pi]$, $g(x)\in L_2[-\pi,\ \pi]$, 它们的付里叶系数分别为 a_n, b_n; α_n, β_n。则必成立下面的（广义）巴色伐尔等式[2]:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx=\frac{a_o\alpha_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n) \tag{1}$$

现在若设 f 是有界可测函数, $g\in L[-\pi,\ \pi]$, 那么它们的巴色伐尔等式必定成立吗? 回答是否定的, 实际上, 存在着在$(-\infty,\ +\infty)$上连续且周期为 2π 的函数 f 和 $g\in L[-\pi,\ \pi]$, 使(1)式不成立。

如取我们所熟知的费耶函数作f

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}K^{-\frac{3}{2}}Q_{n_k}(x),\qquad n_k=3^{K^2}$$

$$Q_m(x)=2sin2mx\sum_{K=1}^{m}\frac{sinKx}{K}.$$

取 $$g(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{l_n n}}cosnx.$$

那么(1)式不成立

因为(1)式右边的级数根据哥西准则是发散的, 事实上, 对于偶函数 f、g 有 $b_n=0$, $\beta_n=0$,

* 收稿日期: 1994-01-03

$$\sum_{3^{(K-1)^2}\leqslant n\leqslant 2,3^{K^2}} a_n\alpha_n \geqslant K^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3^{K^2}}+\cdots+\frac{1}{2}+1\right)\frac{1}{\sqrt[4]{l_n 3^{K^2+1}}}$$

$$>K^{-\frac{3}{2}}K^2 l_n 3\frac{K^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{2l_n 3}}=\frac{(l_n 3)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{2}}>0.$$

为了寻求等式(1)成立的条件，我们分析等式(1)右边级数的部分和

$$\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{K=1}^{n}(a_k\alpha_k+b_k\beta_k)$$

$$=\frac{a_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)dx+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}a_k\int_{-\pi}^{\pi}g(x)cosKxdx+\frac{1}{\pi}b_k\int_{-\pi}^{\pi}g(x)sinKxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{K=1}^{n}a_k cosKx+b_k sinKx\right]g(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_n(f,\ x)\mathbf{g}(x)dx$$

显然，若 f(x)的付里叶级数的部分和 $S_n(f,\ x)$在$[-\pi,\ \pi]$上几乎处处收敛于 f(x)时，等式(1)成立。

定理 1　若有界可测函数 f 的付里叶级数的部分和 $S_n(f,\ x)$在$[-\pi,\ \pi]$上几乎处处收敛于 f(x)，那么，对所有 $g\in L[-\pi,\ \pi]$等式(1)成立。

证明　因为 f 有界可测，$S_n(f,\ x]\to f(x)$在$[-\pi,\ \pi]$上几乎处处成立，故有 $s_n(f,\ x)-f(x)$是一致有界的，又 $g\in L[-\pi,\ \pi]$由勒贝格定理（极限与积分号交换）得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n(f,\ x))g(x)dx=0$$

从而有
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n(f,\ x))g(x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_n(f,\ x)g(x)dx$$

注意到上式右端第二项正是等式(1)中级数的部分和，故等式(1)成立。

从定理1容易得到以下推论

推论　若$g\in L[-\pi,\ \pi]$

$$g(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n cosnx+\beta_n sinnx)$$

f有界可测且 $S_n(f,\ x)$ 在 $[-\pi,\ \pi]$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$，那么

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\frac{\alpha_0}{2}\int_a^b f(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\int_a^b f(x)cosnxdx+\beta_n\int_a^b f(x)sinnxdx \tag{2}$$

其中　$[a,\ b]\subseteq[-\pi,\ \pi]$

推论表明：任何可积函数 $g(x)$ 的付里叶级数乘以具有所指出性质的 f 后，能在有限区间 $[a,\ b]\subseteq[-\pi,\ \pi]$ 上逐项积分。

注意到[3]中($P220$)证明了：当，$g\in L[-\pi,\ \pi]$，f 是有界可测函数时，等式(1)右端

的级数关于 (C, 1) 可求和，且和是$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$，即对 (C, 1) 求和法等式 (1) 成立，我们可以得到定理 2。

定理2 若$g\in L[-\pi, \pi]$，f是有界可测函数，那么等式(1)成立的充要条件是:

$$\sum_{K=1}^{n} K(a_k\alpha_k + b_k\beta_k) = 0(n) \quad (n\to\infty) \tag{3}$$

证明 我们设 S_n 是等式 (1) 中级数的部分和，σ_n 是级数 (1) 的 (C, 1) 和，即

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}(S_0 + S_1 + \cdots + S_n)$$

则有 $$S_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{K=1}^{n} K(a_k\alpha_k + b_k\beta_k)$$

由于在题设条件下，当 $n\to\infty$ 时 σ_n 收敛于等式 (1) 的左端: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$

显然，若等式 (1) 成立，那么 S_n 和 σ_n 在 $n\to\infty$ 时都收敛于 (1) 的左端。所以 $S_n - \sigma_n$ 趋于零，即 $$\frac{1}{n+1}\sum_{K=1}^{n} K(a_k\alpha_k + b_k\beta_k) = 0(1)$$

也就是 $$\sum_{K=1}^{n} K(a_k\alpha_k + b_k\beta_k) = 0(n)$$

反之，若(3)式成立，即 $$\frac{1}{n+1}\sum_{K=1}^{n} K(a_k\alpha_k + b_k\beta_k) = 0(1)$$

那么 S_n 与 σ_n 在 $n\to\infty$ 时，有同样的极限: 等式 (1) 的左端，从而等式 (1) 成立。

参 考 文 献

1 陈建功著. 三角级数论.上海科技出版社

2 徐利治等编著.函数逼近的理论与方法.上海科技出版社

3 Бари.Н.К. 著.М: Физмамгиз. 三角级数.1961.

Realizable Condition of Parseval Equality of Bounded Measurable Function and L Integrable Function

Li Fnegting

(Mathematics Dept. Henan College of Education)

Abstract: This article illustrates that Parseral equality of bounded measurable function and L integrable function is not always realized. And provides equality realization with necessary and sufficient condition.

Keywords: Parseval equality, Fourier coefficient, measurable function, L integrable function, convergence