

# 三神经元 CNN 自治系统中周期与混沌 行为的研究\*

杨育霞 王俊鵬 高金峰

(郑州工学院计算机及自动化系 450002)

**摘 要:** 细胞神经网络(Cellular Neural Networks)自从1988年由L.O.Chua等首先提出后,已有了很大的进展,并在很多领域得到应用。本文仅针对 CNN 基础理论中稳定性问题,研究了一个含有三神经元 CNN 自治系统的非线性的力学性质,用计算机模拟的方法,揭示了此系统中存在着各种周期及混沌现象。

**关键词:** 细胞神经网络, 混沌, 周期

**中图分类号:** TM133

细胞神经网络由 L.O.Chua 等在 1988 年首次提出<sup>[1]</sup>。该类型网络具有二维或三维的格状矩阵结构,属于局部互联且有规律重复的非线性模拟电路。网络中的每一个神经元都是一个由非线性微分方程描述的动力学系统,每一个神经元只与其相邻并且在一定距离内的神经元之间有耦合关系。CNN 提出尽管只有几年时间,却在图像处理、模式识别、机器人视觉和运动检测等领域得到应用,而且已有单片产品出现。其主要原因是该类网络特别适合于 VLSI 技术进行特定功能的单片制作。这一优点是其它类型的神经网络所无法比拟的。因此细胞神经网络的应用前景相当广阔。

而要使 CNN 能够可靠地工作,稳定性是前提。基于 Lyapunov 函数和矩阵方法, L.O.Chua 已经提出几种稳定性的结论。但值得指出,即使是最简单的 CNN,由于元件的非理想、老化等因素,也可能出现混沌和周期振荡的非常规现象。因此,稳定性仍是 CNN 基础研究中的一个重要内容。对于此问题,国际上已有了一些研究成果。例如文献[2]指出,一个最简单的二神经元网络在周期信号激励下,会出现复杂的动力学现象,甚至发生混沌行为。文献[3]提出在一个三神经元自治系统中出现了混沌吸引子。文献[6]报道了另一个三神经元系统中出现的非常规现象。本文对一个与上述不同的三神经元 CNN 自治系统的稳定性进行研究。这些研究对于 CNN 的合理设计来说,不论是排除混沌行为还是利用其产生特殊信号都是很重要的。

\* 本文为河南省自然科学基金资助项目,项目编号: 913142710  
收稿日期: 1995-04-06

# 1 细胞神经网络及其方程

## 1.1 CNN 神经元及平衡点的稳定性

CNN 神经元电路如图 1 (a) 所示, 此电路中仅有一个非线性元件, 其特性示于图 1 (b). 神经元中各量的下标 (i, j) 意味着该神经元位于二维神经网络的 i 行 j 列处. 关于详细数学描述请参看文献[1].

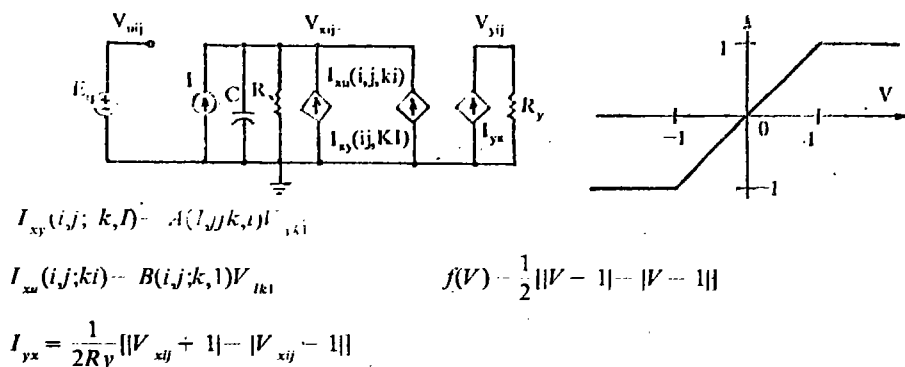


图 1

一个细胞神经网络归一化后, 系统可由以下方程来描述:

$$dx(\tau)/d\tau = -x(\tau) + Ay(\tau) + Bu + i = F(x) \quad (1)$$

状态向量  $x$  是由调节阵列内每一个细胞状态列产生的, 向量的维数是  $MN$ . 为了便利起见, 设  $n = MN$ , 则有  $x \in R^n$ ,  $x_R$  与  $v_{xij}$  的关系可由下式给出:

$$x_k = v_{xij} / v_{sat}, \quad i = ((k-1)div M) + 1, ((k-1)mod M) + 1 \quad (2)$$

上式中,  $v_{sat}$  是某电压基准, 例如细胞元的饱和电压.  $div$  是指整除,  $mod$  指的是模除, 向量  $u$  是网络的输入,  $i$  是细胞的偏移量. 假设它们都是常数,  $A$  和  $B$  是在适当区域内的稀疏矩阵, 向量  $y \in R^n$  是细胞元的输出, 它满足:

$$y_k = f(x_k) = \frac{1}{2}(|x_k + 1| - |x_k - 1|), \quad 1 \leq k \leq n \quad (3)$$

由于每一个 CNN 的细胞元中都具有相同的分段线性的非线性特性, 所以可以把  $n$  维欧氏空间分成不同的子空间. 在这些子空间中, 各个细胞元的状态或是均为非饱和的, 即处于线性子空间  $D_0$ ; 或均是饱和的, 即处于饱和子空间  $D_s$ ; 或部分饱和部分不饱和, 即处于局部饱和子空间  $D_p$ . 在每个子空间, 系统可以由线性常微分方程来描述. 由文献[5]提出的两个定理可知, 如果在饱和子空间  $D_s$  内有一个平衡点, 则此平衡点为唯一的, 且是渐近稳定的; 如果在局部饱和子空间  $D_p$  与线性子空间  $D_0$  中有平衡点, 则这些平衡点为不稳定的.

## 1.2 三神经元自治网络及其方程

本文所研究的三神经元自治系统如图2所示, 其微分方程为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + x_1 = p_1 f(x_1) - sf(x_2) - tf(x_3) \\ \dot{x}_2 + x_2 = -sf(x_1) + p_2 f(x_2) - rf(x_3) \\ \dot{x}_3 + x_3 = -tf(x_1) + rf(x_2) + p_3 f(x_3) \end{cases} \quad (4)$$

这里  $p_1 > p_2 > p_3 > 1$ , 输入信号  $u$  及  $i$  均为零。

其输出方程为:

$$f(x_i) = \frac{1}{2}(|x_i + 1| - |x_i - 1|), \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5)$$

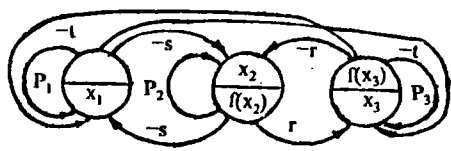
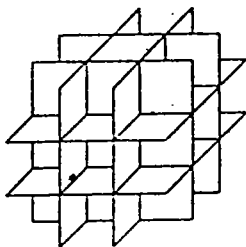
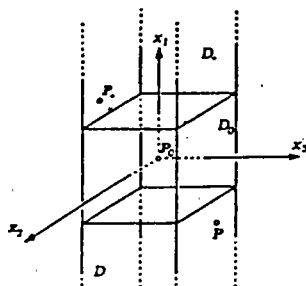


图2



(a) 图3



(b)

由于式(5)把每个  $x$  分量分成 3 个区域, 因此状态空间可以分成 27 个子空间。在这里我们只讨论其中 3 个子空间。这是因为通过大量计算, 在我们感兴趣的参数下, 系统的平衡点处在这 3 个子空间。它们是:

$$\begin{aligned} D_+ &= \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 \geq 1, |x_2| < 1, |x_3| < 1\} \\ D_0 &= \{(x_1, x_2, x_3) | |x_1| < 1, |x_2| < 1, |x_3| < 1\} \\ D_- &= \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 \leq -1, |x_2| < 1, |x_3| < 1\} \end{aligned} \quad (6)$$

在以上 3 个子空间内的平衡点为:

$$P_+ = (p_1 - \frac{s^2(p_3 - 1) + t^2(p_2 - 1)}{(p_2 - 1)(p_3 - 1) + r^2}, \frac{s(p_3 - 1) + rt}{(p_2 - 1)(p_3 - 1) + r^2}, \frac{t(p_2 - 1) - rs}{(p_2 - 1)(p_3 - 1) + r^2})$$

$$P_0 = (0, 0, 0)$$

$$P_- = -P_+$$

图 3(a) 所示的是空间  $R^3$  分解成 27 个子空间, 图 3(b) 为以上所讨论的  $D^+$ ,  $D_0$ ,  $D_-$  空间以及处在每个子空间的平衡点  $P^+$ ,  $P_0$ ,  $P_-$ 。

从图 3 中可以看出,  $P_+$  与  $P_-$  是关于原点对称的两个平衡点, 而  $P_0$  处于原点。又由于  $D_+$ 、 $D_-$  是局部饱和子空间,  $D_0$  是线性子空间, 故这三个平衡点均为不稳定的。若调整参数使得平衡点处在  $D_+$ ,  $D_0$ ,  $D_-$  子空间, 系统就会出现周期甚至混沌振荡。

## 2. 计算机模拟

### 2.1 相空间吸引子

采用四阶龙格——库塔算法, 步长  $\Delta H = 0.005$ , 文中所给出均为舍去前 20000 个点

后的稳态结果。计算初值为  $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0.1$ 。

## 2.2 庞卡莱映射

取  $x_3 = 0$  时,  $x_1 \sim x_2$  平面作为庞卡莱映射截面。

## 2.3 功率谱模拟

采用 FFT 算法, 频数  $K = 4096$ , 时间序列  $\{x(n)\}$  的数据个数  $n = 4096$ , 采样间隔  $T = 1$  (归一化时间)。由于时间序列  $\{x(n)\}$  为实数序列, 其功率谱对称于  $f_{\max}/2$ , 故频谱图只画出了一半。

图 4 至图 9 为式 (4) 的参数  $(p_1, p_2, p_3, s, t, r)$  取不同值时所对应的具有代表性的吸引子、庞卡莱映射及功率谱。每个图中, (a), (b) (c) 分别为吸引子在  $(x_1 \sim x_2)$ 、 $(x_1 \sim x_3)$ 、 $(x_2 \sim x_3)$  平面的投影, (d) 为庞卡莱映射, (e) 为  $x_1$  的功率谱。

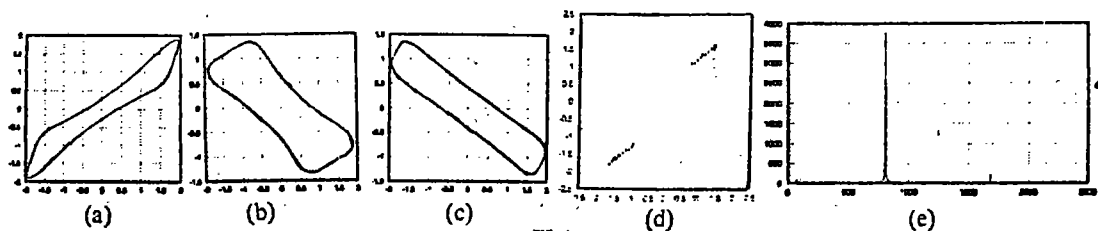


图 4

当参数为  $(1.85, 1.6, 1.34, 3.5, 4.0, 5.0)$  时, 模拟结果如图 4 所示。平衡点为  $P_+ = (1.304, 0.841, -0.599) \in D_+$ ,  $P_0 = (0, 0, 0) \in D_0$ ,  $P_- = (-1.304, -0.841, 0.599) \in D_-$ 。由于吸引子是关于原点对称的简单极限环, 故此时系统处于周期状态, 由于功率谱频率间隔  $\Delta f = 850$  故周期较短。吸引子轨迹超越了  $D_+$ ,  $D_0$ ,  $D_-$  子空间。

当参数为  $(1.88, 1.6, 1.35, 3.5, 4.0, 5.0)$  时, 模拟结果如图 5 所示。平衡点为  $P_+ = (1.33, 0.84, -0.60) \in D_+$ ,  $P_0 = (0, 0, 0) \in D_0$ ,  $P_- = (-1.33, -0.84, 0.60) \in D_-$ 。此时功率谱为连续的谱, 吸引子为对称于原点的混沌吸引子, 故系统处于混沌状态。

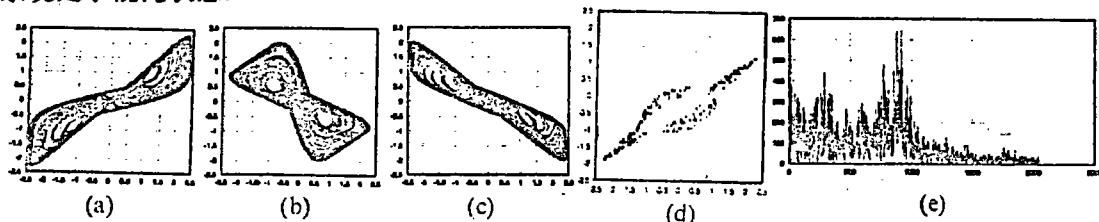


图 5

当参数为  $(1.9, 1.6, 1.35, 3.5, 4.0, 5.0)$  时, 模拟结果如图 6 所示。平衡点为  $P_+ = (1.349, 0.842, -0.599) \in D_+$ ,  $P_0 = (0, 0, 0) \in D_0$ ,  $P_- = (-1.349, -0.842, 0.599) \in D_-$ 。吸引子为另一简单极限环, 其轨迹处在  $D_0$ ,  $D_+$  及其它子空间。功率谱频率间隔比图 4 更宽, 即  $\Delta f = 1000$ , 故是周期更短的周期状态。

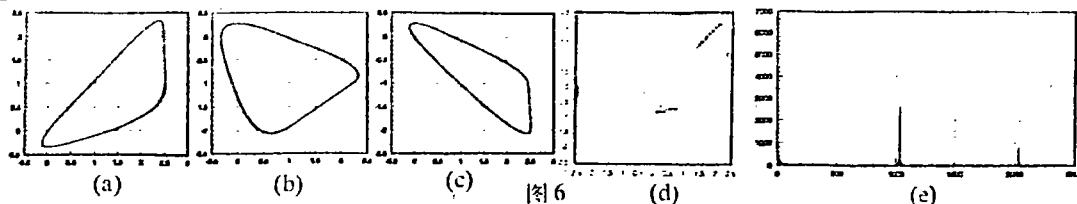


图6

当参数为  $(1.78, 1.5, 1.3, 3.5, 4, 5)$  时, 模拟结果如图 7 所示. 平衡点为  $P_+ = (1.316, 0.837, -0.616) \in D_+$ ,  $P_0 = (0, 0, 0) \in D_0$ ,  $P_- = (-1.316, -0.837, 0.616) \in D_-$ . 吸引子为一对对称于原点的复杂极限环, 轨迹超出了平衡点所处的  $D_+$ ,  $D_0$ ,  $D_-$  子空间. 功率谱频率间隔  $\Delta f = 210$ , 故是属于长周期的周期状态.

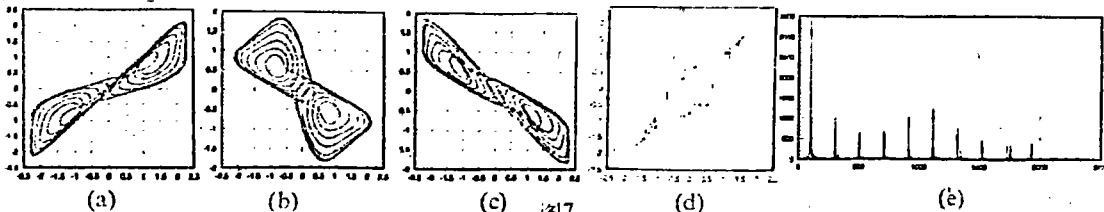


图7

当参数为  $(1.70, 1.5, 1.3, 2.8, 3.5, 4.5)$  时, 模拟结果如图 8 所示. 平衡点为  $P_+ = (1.284, 0.813, -0.532) \in D_+$ ,  $P_0 = (0, 0, 0) \in D_0$ ,  $P_- = (-1.284, -0.813, 0.532) \in D_-$ . 吸引子为对称于原点的复杂极限环, 轨迹超出了平衡点所处的  $D_+$ ,  $D_0$ ,  $D_-$  子空间. 功率谱频率间隔  $\Delta f = 240$ , 故是比图 7 稍短的长周期的周期状态.

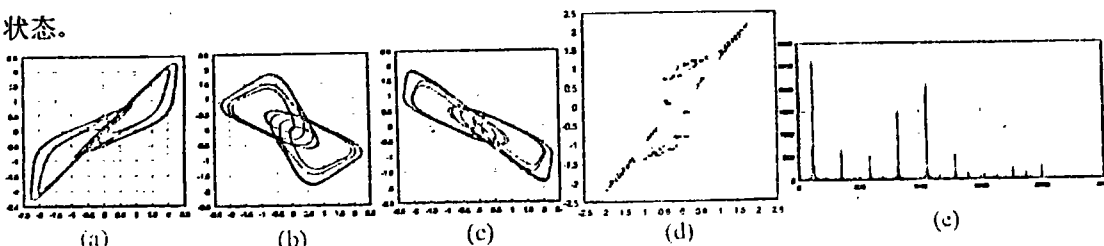


图8

当参数为  $(1.75, 1.5, 1.3, 3.1, 3.5, 4.5)$  时, 模拟结果如图 9 所示. 平衡点为  $P_+ = (1.31, 0.82, -0.60) \in D_+$ ,  $P_0 = (0, 0, 0) \in D_0$ ,  $P_- = (-1.31, -0.82, 0.60) \in D_-$ . 对称于原点的吸引子层次虽然不很清晰, 但从功率谱的离散性可知, 它们属于周期状态, 由于  $\Delta f = 260$ , 故是比图 8 稍短的长周期的周期状态.

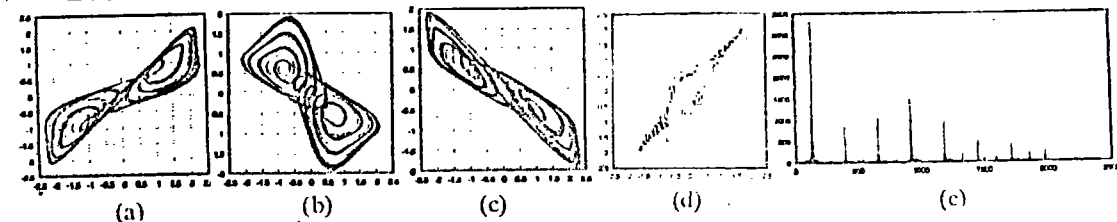


图9

图 10~ 图 13 是当  $p_1 = 1.85, p_2 = 1.6, p_3 = 1.3$  保持不变,  $s, t, r$  绝对值也不变, 只是符号变化时的吸引子。图中 (a), (b) (c) 分别为吸引子在  $(x_1 \sim x_2), (x_1 \sim x_3), (x_2 \sim x_3)$  平面的投影。其中图 10 为  $S = 3.5, t = 4, r = 5$  时的吸引子, 平衡点  $P_+ = (1.323, 0.836, -0.60) \in D_+$ ,  $P_0 = (0, 0, 0) \in D_0$ ,  $P_- = (-1.323, -0.836, 0.60) \in D_-$ ; 图 11 为  $S = -3.5, t = 4, r = 5$  时的吸引子, 平衡点  $P_+ = (1.323, 0.753, -0.79) \in D_+$ ,  $P_0 = (0, 0, 0) \in D_0$ ,  $P_- = (-1.323, -0.753, -0.79) \in D_-$ ; 图 12 为  $S = -3.5, t = 4, r = 5$  时的吸引子, 平衡点  $P_+ = (1.323, -0.836, -0.60) \in D_+$ ,  $P_0 = (0, 0, 0) \in D_0$ ,  $P_- = (-1.323, 0.836, 0.60) \in D_-$ ; 图 13 为  $S = 3.5, t = 4, r = -5$  时的吸引子, 平衡点  $P_+ = (1.323, -0.752, 0.79) \in D_+$ ,  $P_0 = (0, 0, 0) \in D_0$ ,  $P_- = (-1.323, 0.752, -0.79) \in D_-$ 。从以上四个图看出, 不论  $s, t, r$  的符号如何组合变化, 其混沌吸引子的性质不变, 只是平衡点及吸引子形状不同而已。

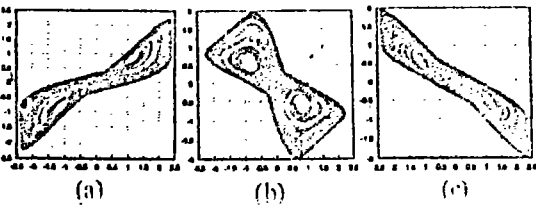


图 10

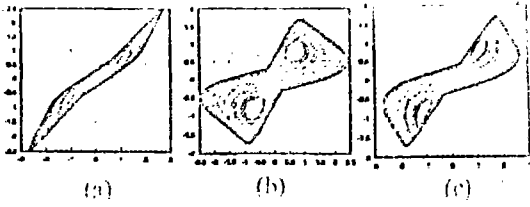


图 11

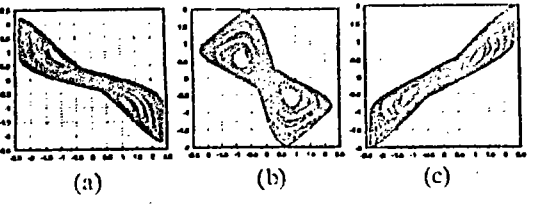


图 12

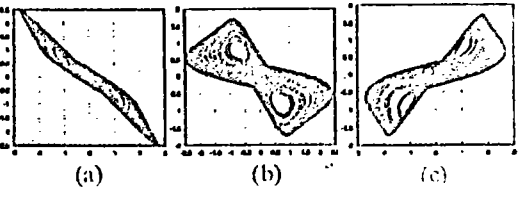


图 13

2.4 李雅普诺夫指数计算

采用文献[4]提出的算法来计算李雅普诺夫指数, 其部分计算结果如下表:

参 数						指 数			状 态
$p_1$	$p_2$	$p_3$	$s$	$t$	$r$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	
1.85	1.6	1.3	3.5	4	5	0.22	-0.01	-0.19	混沌
1.85	1.6	1.34	3.5	4	5	0	-0.15	-0.27	周期
1.88	1.6	1.35	3.5	4	5	0.17	-0.01	-0.14	混沌
1.9	1.6	1.35	3.5	4	5	0.00	-0.15	-0.25	周期
1.78	1.5	1.35	3.5	4	5	0.21	-0.01	-0.22	混沌
1.78	1.5	1.3	3.5	4	5	0.00	-0.15	-0.24	周期
1.75	1.5	1.3	3.1	3.5	4.5	0.01	-0.12	-0.23	周期
1.7	1.5	1.3	2.8	3.5	4.5	0.01	-0.11	-0.21	周期

### 5. 分叉参数图

为了详细讨论系统的整体概况,进行了全局范围的搜索。采用的方法是把式(4)的6个参数( $p_1, p_2, p_3, s, t, r$ )中,改变其中一个参数,使另5个固定不变,随此参数变化,计算吸引子与 $x_1 = x_2$ 直线相交的 $x_1$ 值,从而画出这时的 $x_1$ 随参数变化的情况即分叉参数图。

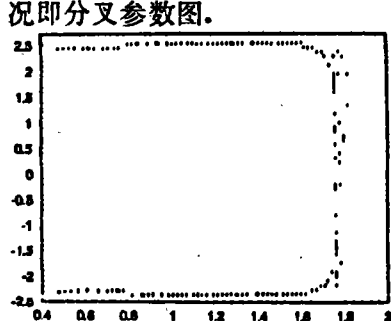


图14

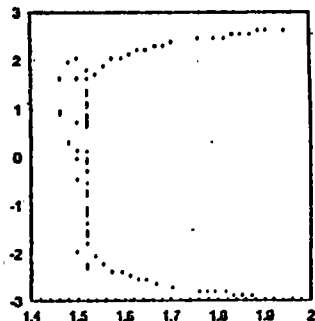


图15

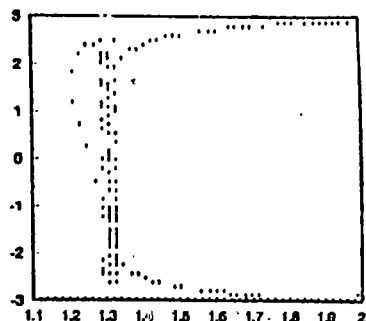


图16

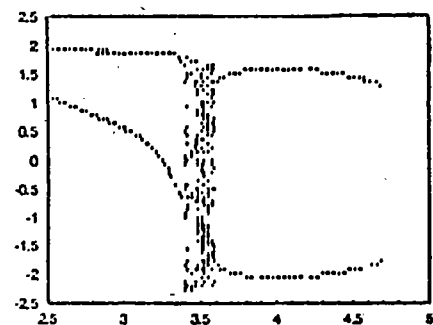


图17

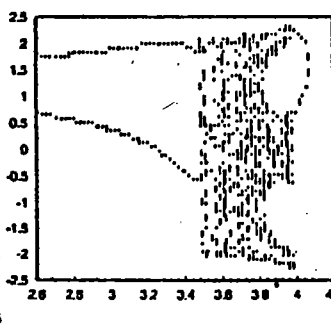


图18

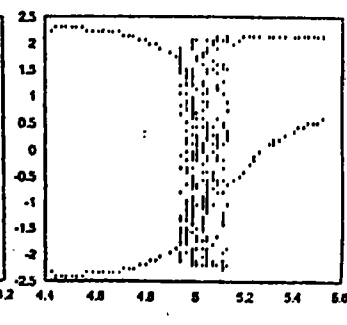


图19

图14为 $p_2 = 1.5, p_3 = 1.3, S = 3.5, t = 4, r = 5, p_1 = (0.4 \sim 2.0)$ 即分叉参数为 $p_1$ 的分叉参数图。从图中看出,只有当 $p_1 = 1.76$ 前后时系统才出现混沌,而在图中其它 $p_1$ 值下系统均为周期状态。

图15为 $p_1 = 1.78, p_3 = 1.3, S = 3.5, t = 4, r = 5, p_2 = (1.4 \sim 2)$ ,即分叉参数为 $p_2$ 时的分叉参数图。从图中看出,只有当 $p_2 = 1.52$ 前后时系统才会出现混沌,而在图中其它参数下系统处于周期状态。

图16为 $p_1 = 1.85, p_2 = 1.6, S = 3.5, t = 4, r = 5, p_3 = (1.1 \sim 2)$ ,即分叉参数为 $p_3$ 时的分叉参数图。从图中看出,当 $p_3 = 1.3$ 前后时系统才会出现混沌,而在图中其它参数下系统处于周期状态。

图17为 $p_1 = 1.85, p_2 = 1.6, p_3 = 1.3, t = 4, r = 5, S = (2.5 \sim 4.7)$ 即分叉参数为 $S$ 时的分叉参数图。从图中看出,当 $S = (3.4 \sim 3.6)$ 范围内系统会出现混沌,而在图中其它参数下系统处于周期状态。

图18为 $p_1 = 1.75, p_2 = 1.5, p_3 = 1.3, s = 3.1, r = 4.5, t = (2.6 \sim 4.05)$ 即分叉参数为 $t$ 时的分叉参数图。从图中看出,当 $t = (3.44 \sim 3.8)$ 范围时,系统处于混沌状

态,  $t = (3.8 \sim 3.94)$  范围内时混沌或长周期吸引子出现两个空洞, 在其它参数下系统处于周期状态。

图 19 为  $p_1 = 1.85$ ,  $p_2 = 1.6$ ,  $p_3 = 1.3$ ,  $S = 3.5$ ,  $t = 4$ ,  $r = (4.4 \sim 5.4)$  即分叉参数为  $r$  时的分叉参数图。从图中看出, 当  $r = (4.94 \sim 5.10)$  范围内时, 系统可能出现混沌。在图中其它参数下系统处于周期状态。

### 3 对计算机模拟结果的讨论

3.1 此系统中混沌吸引子具有共同的类似于著名的双涡卷结构。以图 5 所示的吸引子为例, 其平衡点对应的雅可比矩阵的特征值计算为:  $\gamma_p = -1.0$ ,  $\sigma_p \pm j\omega_p = 0.475 \pm j4.998$  (在  $D_+$  和  $D_-$  子空间),  $\gamma_0 = 3.2$ ,  $\sigma_0 \pm j\omega_0 = -0.685 \pm j1.45$  (在  $D_0$  子空间)。设  $E^S(P_{\pm})$  是实特征值对应的特征空间,  $E^U(P_{\pm})$  代表复特征值对应的特征空间,  $E^U(P_c)$  和  $E^S(P_0)$  分别为  $\gamma_0$  和  $\sigma_0 \pm j\omega_0$  对应的特征空间, 则有  $\dim E^S(P_{\pm}) = \dim E^U(P_0) = 1$ ,  $\dim E^U(P_{\pm}) = \dim E^S(P_0) = 2$ 。在  $D_0$  和  $D_{\pm}$  区域内的平衡点的特征空间几乎和双涡卷的特征空间完全相同。由于本吸引子对应的轨迹并不象双涡卷那样仅局限在三个主要的子空间  $D_+$ ,  $D_0$ ,  $D_-$  内, 故其它的子空间也将影响整个系统的性能。

3.2 在参数  $p_1 > p_2 > p_3 > 1$ , 且  $p_3 < 2$  的条件下,  $s, t, r$  只要绝对值不变, 任意改变其符号, 将不会改变系统的工作状态, 只是改变平衡点的位置及吸引子形状。

3.3 此系统中出现多种周期振荡吸引子, 例如在任一个分叉参数图中都可以看到, 在参数处在混沌状态前后时, 其周期吸引子总是不同的。另外, 除了一般简单周期极限环外, 还出现了几种复杂周期极限环情况, 即为长周期的周期状态。甚至有如图 9 那样的吸引子看似拟周期, 但经过功率谱计算及指数计算证明, 它仍属周期性质, 只是周期较长而已。

3.4 当初值取线性子空间  $D_0$  的任一点时, 吸引子的形状及性质均不变, 这一点与文献 [6] 中的情况是不同的。

### 4 结 论

4.1 在我们所研究的三细胞元 CNN 自治系统中, 具有非常复杂的非线性动力学性质, 任意改变一个参数, 都可使系统出现周期及混沌等不稳定的工作状态。

4.2 研究发现, 系统状态的变化对  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  参数变化的敏感性不强, 从分叉参数图上可看到长距离范围内系统处在一种工作状态。这提示我们在神经网络设计时应取哪些参数范围较可靠。

4.3 本系统出现了多种形态的吸引子结构, 除了周期吸引子形状及周期各异外, 混沌吸引子的平衡点位置也可以有多变。所以, 作为一种特殊信号发生器, 本系统具有一定的实用价值。

4.4 从计算机模拟的结果来看, 这是一个很有研究价值的系统, 所以有必要做进一步的工作, 比如制作一个实际电路进行电路实验的研究。有关后期工作的情况我们将在以后的文章中发表。

### 参 考 文 献

- 1 L.O.Chua and L.Yang "Cellular neural Networks: Theory." IEEE Trans Circuits syst. Vol.35, PP1257-1271, Oct. 1988.
- 2 F.Zhou and J.A.Nossek "A Chaotic Attractor with Cellular Neural Networks". IEEE. Trans. CAS. Vol. 38, PP811-812, July 1991.
- 3 Fan Zou Josef. A. "Bifurcation and Chaos in Cellular Neural Networks." IEEE Trans. CAS. Vol.40, PP166-173, March 1993
- 4 L.O.Chua. "The Double Scroll "IEEE Trans. CAS. Vol.32, No.8 PP798. ~ 817, 1995
- 5 Fan Zou "Homoclinic and Heteroclinic Orbits of the Three-Cell Cellular Neural Networks." IEEE Trans CAS. Vol.40, No.11 PP843~848 1993
- 6 高金峰等 "三神经元细胞神经网络(CNN)中的周期与混沌振荡现象." 《93年南方九省电工理论学术年会论文集, 厦门》, PP138-141

## The Study of Periodic and Chaotic Behavior in Three Cells Cellular Neural Networks

Yang Yu-xia   Wang Jun-kun   Gao Jin-feng

**Abstract:** In this paper, the nonlinear dynamic property in a three cells cellular neural networks are studied, the methods have been used are computer simulation and qualitative analysis. The periodic and chaotic phenomena in the system are observed.

**Keywords:** Neural Networks, Chaos, Periodic