

用边界单元法分析各向异性板的 的应力集中问题*

王 博 董耀星 王宗敏

(郑州工学院人事处)

摘 要: 本文用各向异性板的基本解作权函数建立了平面一般各向异性问题的直接边界元格式, 可求解正交或一般各向异性材料的平面问题。算例表明: 各向异性边界元对于应力集中问题的求解具有较高的计算精度。

关键词: 各向异性, 板, 边界元, 应力集中

中图分类号: O39: TB301

1 引 言

随着复合材料愈来愈广泛地应用于航天、船舶、建筑等众多领域, 对复合材料力学特性的研究也愈来愈受到人们的重视。众所周知, 当复合材料中出现应力集中时, 其承载能力将明显下降。因此, 复合材料中应力集中问题的计算是复合结构设计和强度分析中非常重要的课题。边界单元法由于其对应力集中问题的适用性, 理所当然受到了学者们的青睐。Rizzo 和 Shippy(1970)、Tomlin 和 Butterfield(1974)以及 Snyder 和 Cruse(1975)等都曾研究过边界单元法在各向异性体中的应用。近年来, Mahajerin 和 Sikarskie(1986)、Vable 和 Sikarskie(1988)以及我国学者田宗若(1992)在这方面也都进行了一些研究。严格来讲, 这些研究都是针对正交各向异性体的。Tan 和 Gao(1992)研究了平面各向异性体的直接边界元格式后指出其对平面一般各向异性问题的求解具有较好的适用性。

本文用无限大板中一点受集中力作用时的解作为权函数, 建立了平面一般各向异性问题的边界单元方程, 并计算了各向异性板中圆孔周边的应力集中问题。与理论解的比较结果表明, 各向异性体的直接边界元格式具有非常高的计算精度。

2 各向异性弹性体基本理论

平面各向异性弹性体的平衡方程和几何方程与各向同性体完全相同, 区别仅在于物理

* 河南省自然科学基金资助项目, 项目编号: 934060400

收稿日期: 1995-03-08

方程。平面各向异性体的物理方程可写为:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

其中 a_{ij} 可用工程常数表示如下:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1/E_1 \\ a_{22} &= 1/E_2 \\ a_{12} &= -\nu_{12}/E_1 = -\nu_{21}/E_2 \\ a_{16} &= \eta_{12,1}/E_1 = \eta_{1,12}/G_{12} \\ a_{26} &= \eta_{12,2}/E_2 = \eta_{2,12}/G_{12} \\ a_{66} &= 1/G_{12} \end{aligned} \quad (2)$$

其中:

E_i : 第 i 个方向的杨氏模数;

G_{12} : X_1, X_2 平面内的剪切模量;

ν_{ij} : 泊桑比, 定义为由于 i 方向单位拉伸应变引起的 j 方向的压缩应变;

$\eta_{ij,k}$ 和 $\eta_{i,jk}$ 分别为第一类和第二类相互影响系数^[7]。在正交各向异性体中, 其在弹性主轴方向与坐标轴相同时沿弹性主轴方向的值为零。

对于平面应变问题, 方程(1)可写为:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

其中 b_{ij} 可用 a_{ij} 表示为:

$$b_{ij} = a_{ij} - a_{i3}a_{j3}/a_{33}, \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (4)$$

而:

$$\begin{aligned} a_{i3} &= -\nu_{i3}/E_i = -\nu_{3i}/E_3 \quad i = 1, 2 \\ a_{33} &= 1/E_3 \\ a_{63} &= \eta_{12,3}/E_3 = \eta_{3,12}/G_{12} \end{aligned} \quad (5)$$

各向异性弹性体平面应力问题的 Airy 应力函数 $F = F(x, y)$ 满足下面的方程 (不计体力)^[8]:

$$\begin{aligned} & a_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & - 2a_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

如果把(6)式写成四个一阶线性微分算子的符号形式如下:

$$D_1 D_2 D_3 D_4 F = 0 \quad (7)$$

则其中的 D_k 代表下面的运算:

$$D_k = \frac{\partial}{\partial y} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x} \quad (8)$$

而 μ_k 是下面特征方程的根:

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \quad (9)$$

列赫尼茨基已经证明^[8]: 特征方程(9)及其相应的平面应变时的方程可以有变的或纯虚数的根, 而不可能有实根. 因此(9)式的根可一般地写为:

$$\mu_k = \alpha_k + i\beta_k, \bar{\mu}_k = \alpha_k - i\beta_k (k=1,2) \quad (10)$$

其中, $i = \sqrt{-1}$, α_k, β_k 为实数且 $\beta_k > 0$.

μ_k 称为平面应力状态的复参数, 它们在某种程度上表征了材料的各向异性性质. 例如:

对于各向同性材料:

$$\mu_k = i, \text{ 即: } \alpha_k = 0, \beta_k = 1,$$

对于正交各向异性材料:

$$\alpha_k = 0 \text{ 或 } \alpha_2 = -\alpha_1 \text{ 且 } \beta_2 = \beta_1$$

定义特征方向及其共轭为:

$$z_k = x + \mu_k y, \bar{z}_k = x + \bar{\mu}_k y, k=1,2 \quad (11)$$

则应力函数可以表示如下:

1. 复参数不相等时:

$$F = 2\text{Re}[F_1(Z_1) + F_2(Z_2)] \quad (12)$$

2. 复参数成对相等时:

$$F = 2\text{Re}[F_1(Z_1) + \bar{Z}_1 F_2(Z_1)] \quad (13)$$

弹性体的应力和位移可由应力函数求出. 例如: 当复参数不相等且无体力时, 如令:

$$\begin{aligned} \phi_1(Z_1) &= \frac{dF_1}{dZ_1}, \quad \phi_2(Z_2) = \frac{dF_2}{dZ_2} \\ \phi_1'(Z_1) &= \frac{d\phi_1}{dZ_1}, \quad \phi_2'(Z_2) = \frac{d\phi_2}{dZ_2} \end{aligned} \quad (14)$$

则应力分量可写为:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\text{Re}[\mu_1^2 \phi_1'(Z_1) + \mu_2^2 \phi_2'(Z_2)] \\ \sigma_y &= 2\text{Re}[\phi_1'(Z_1) + \phi_2'(Z_2)] \\ \tau_{xy} &= -2\text{Re}[\mu_1 \phi_1'(Z_1) + \mu_2 \phi_2'(Z_2)] \end{aligned} \quad (15)$$

而位移分量为:

$$\begin{aligned} u &= 2Re[p_1\phi_1(Z_1) + p_2\phi_2(Z_2)] - \omega y + u_0 \\ v &= 2Re[q_1\phi_1(Z_1) + q_2\phi_2(Z_2)] + \omega x + v_0 \end{aligned} \quad (16)$$

其中:

$$p_i = a_{11}\mu_i^2 + a_{12} - a_{16}\mu_i \quad i=1,2 \quad (17)$$

$$q_i = a_{12}\mu_i + a_{22} / \mu_i - a_{26}$$

ω 、 u_0 、 v_0 代表了物体的刚体位移。

3 二维各向异性弹性体的基本解及边界元格式

列赫尼茨基给出了无限平面介质内某点作用有集中力 P (P 可看作是在无限小空洞边界上的合力等于 P 的载荷的极限情况) 时的解^[8]。他所取的应力函数为:

$$\phi_1(Z_1) = A_{11}\ln Z_1, \quad \phi_2(Z_2) = A_{12}\ln Z_2 \quad (18)$$

设 $P = p_x = 1$ 时:

$$\phi_{11}(Z_1) = A_{11}\ln Z_1, \quad \phi_{12}(Z_2) = A_{12}\ln Z_2 \quad (19)$$

而 $P = p_y = 1$ 时:

$$\phi_{21}(Z_1) = A_{21}\ln Z_1, \quad \phi_{22}(Z_2) = A_{22}\ln Z_2 \quad (20)$$

上述两种荷载分别作用下的解 (基本解) 可写为:

$$\begin{aligned} U_{i1}(P, Q) &= 2Re[p_1 A_{11}\ln Z_1(P, Q) \\ &\quad + p_2 A_{12}\ln Z_2(P, Q)] \\ U_{i2}(P, Q) &= 2Re[q_1 A_{11}\ln Z_1(P, Q) \\ &\quad + q_2 A_{12}\ln Z_2(P, Q)] \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} T_{i1}(P, Q) &= 2n_1(Q)Re[\mu_1^2 A_{11} / Z_1(P, Q) + \mu_2^2 A_{12} / Z_2(P, Q)] \\ &\quad - 2n_2(Q)Re[\mu_1 A_{11} / Z_1(P, Q) + \mu_2 A_{12} / Z_2(P, Q)] \\ T_{i2}(P, Q) &= -2n_1(Q)Re[\mu_1 A_{11} / Z_1(P, Q) + \mu_2 A_{12} / Z_2(P, Q)] \\ &\quad + 2n_2(Q)Re[A_{11} / Z_1(P, Q) + A_{12}(P, Q)] \quad i=1,2 \end{aligned} \quad (22)$$

其中:

$U_{ij}(P, Q)$: P 点 i 方向作用单位集中力时 Q 点 j 方向的位移;

$T_{ij}(P, Q)$: P 点 i 方向作用单位集中力时 Q 点 j 方向的面力;

$Z_i(P, Q)$: 当坐标原点在 P 点时复方向 Z_i 在 Q 点的值; 即:

$$Z_i(P, Q) = [X(Q) - X(P)] + \mu_i[Y(Q) - Y(P)]$$

$n_i(Q)$: 边界点 Q 处法线的第 i 个方向余弦;

A_{ij} : 应力函数(19)、(20)两式中的复系数, 可根据平衡条件和位移单值条件由下列方程

组求出:

$$\begin{bmatrix} Imi & Rei & Imi & Rei \\ Im\mu_1 & Re\mu_1 & Im\mu_2 & Re\mu_2 \\ Imp_1 & Rep_1 & Imp_2 & Rep_2 \\ Imq_1 & Req_1 & Imq_2 & Req_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Re A_{11} & Re A_{21} \\ Im A_{11} & Im A_{21} \\ Re A_{12} & Re A_{22} \\ Im A_{12} & Im A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4\pi} \\ \frac{1}{4\pi} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

各向异性体的边界积分方程在形式上与各向同性体相同, 当不计体力时, 可写为:

$$\begin{aligned} & C_{ij}(P)u_j(P) + \int_{\Gamma} T_{ij}(P,Q)u_j(Q)d\Gamma(Q) \\ & = \int_{\Gamma} U_{ij}(P,Q)t_j(Q)d\Gamma(Q) \quad i,j=1,2 \end{aligned} \quad (24)$$

式中 $U_{ij}(P,Q)$ 、 $T_{ij}(P,Q)$ 由 (21)、(22) 式给出。

(24) 式离散后得到的各向异性体的边界单元法的线性代数方程组仍可写为:

$$[H]\{u\} = [G]\{t\} \quad (25)$$

求解方程 (25) 即可求得边界节点的位移和面力。

4 边界点应力计算

边界点的应力状态可由边界上的位移和面力直接求出。边界上 Q 点的正应力和剪应力为:

$$\begin{cases} \sigma_n(Q) = t_1(Q)n_1(Q) + t_2(Q)n_2(Q) \\ \tau_t(Q) = -t_1(Q)n_2(Q) + t_2(Q)n_1(Q) \end{cases} \quad (26)$$

其中 $n_i(Q)$ 为 Q 点外法向的第 i 个方向余弦,

$t_i(Q)$ 为 Q 点面力沿坐标轴 X_i 方向的分量。

为求 Q 点的切向正应力, 由单元内任一点的位移

$$\{u(\xi)\} = [\Phi(\xi)]^e \{u\}^e \quad (27)$$

及 Q 点的切向量

$$[l(Q)] = [-n_2(Q), n_1(Q)] \quad (28)$$

先求出 Q 点的切向位移:

$$u_t(Q) = [l(Q)]\{u(\xi)\} \quad (29)$$

则 Q 点的切向应变为:

$$\varepsilon_t(Q) = \left. \frac{du_t(\xi)}{d\Gamma(\xi)} \right|_{\xi=\xi(Q)} = \frac{[l(Q)] \frac{d[\Phi(Q)]^e}{d\xi} \{u\}^e}{|J\xi(Q)|} \quad (30)$$

对于各向异性体的平面问题, Q 点的切向正应力可以由下述公式求出:

$$\sigma_i(Q) = \frac{1}{a_{22}} [\varepsilon_i(Q) - a'_{12} \sigma_n(Q) - a'_{26} \tau_i(Q)] \quad (31)$$

式中:

$$a'_{22} = a_{11} \sin^4 \varphi + (2a_{12} + a_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$$

$$+ a_{22} \cos^4 \varphi - (a_{16} \sin^2 \varphi + a_{26} \cos^2 \varphi) \sin 2\varphi$$

$$a'_{12} = a_{12} + (a_{11} + a_{22} - 2a_{12} - a_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$$

$$+ \frac{1}{2} (a_{26} - a_{16}) \sin^2 \varphi \cos 2\varphi$$

$$a'_{26} = [a_{22} \cos^2 \varphi - a_{11} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} (2a_{12} + a_{66}) \cos 2\varphi] \sin 2\varphi + a_{16} \sin^2 \varphi (3 \cos^2 \varphi$$

$$- \sin^2 \varphi)$$

$$+ a_{26} \cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi)$$

其中 φ 为 Q 点外法线与 x 轴正向的夹角。

5 各向异性板的孔边应力集中问题

含有园孔的各向异性板在孔边承受法向均布力及在无穷远处承受单向拉伸时的理论解已由列赫尼茨基给出^[8], 这为我们提供了非常合适的计算例题来检验各向异性边界元法的计算精度及其广泛的适用性。

算例 1. 含有一半半径 $r = 1\text{m}$ 的园孔的无限大正交各向异性板在边边承受均布力 $P = 1.0\text{MPa}$ (图 1)。

板的弹性常数取自文献[8]中给出的胶合板的值:

$$E_1 = 1.2 \times 10^4 \text{MPa}$$

$$E_2 = 0.6 \times 10^4 \text{MPa}$$

$$G_{12} = 0.07 \times 10^4 \text{MPa}$$

$$\nu_{12} = 0.071,$$

$$\nu_{21} = 0.036,$$

计算结果示于图 2 和图 3, 图中还以虚线画

出了各向同性板当其弹模分别等于 E_1 和 E_2 时的计算结果。

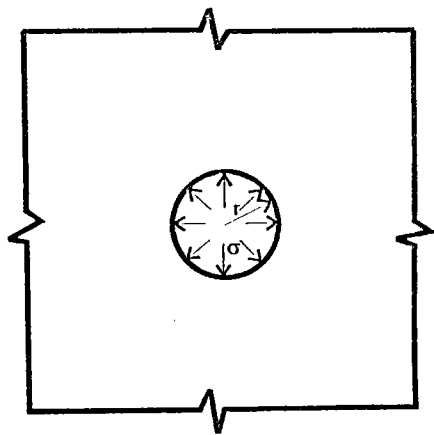


图1 含园孔无限大板受孔边径向压力

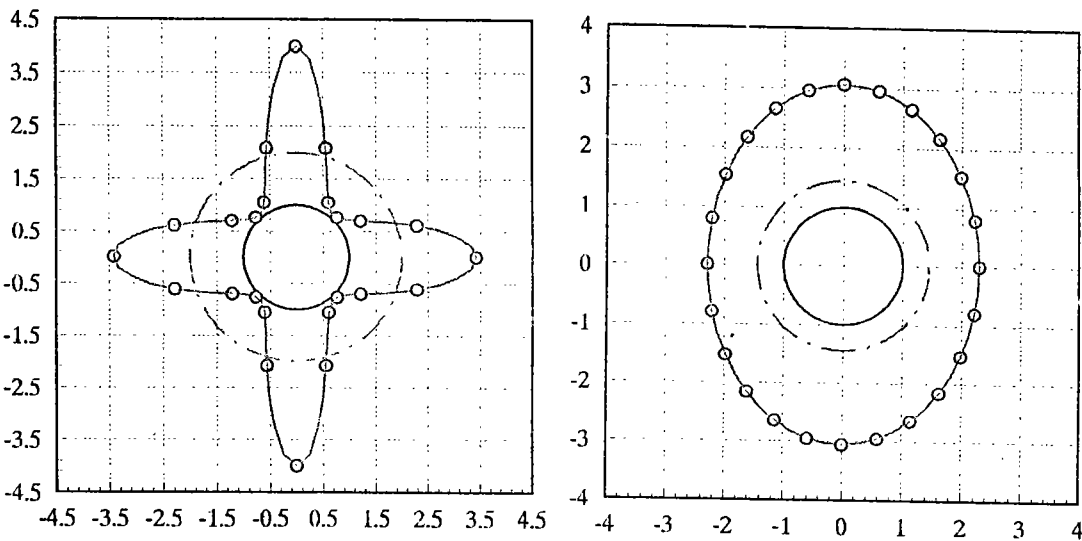


图2 例-孔边切向应力分布图 图3 例-孔边径向位移图

由图2可以看出,各向异性板的孔边应力集中现象比各向同性板严重。表1列出了 $\theta=0^\circ$ 和 $\theta=90^\circ$ 两点(即沿两个弹性主轴方向)的孔边切向应力以及圆孔半径在这两个方向上的变化量的理论值和边界元法计算值,由表1可见,计算误差均小于万分之一。

表1 算例-计算结果与理论解比较表

比较项目	理论解	边界元解	相对误差
$\sigma_{\theta} _{\theta=0^\circ}$	2.4417	2.4417	0.0%
$\sigma_{\theta} _{\theta=90^\circ}$	3.0388	3.0387	-0.003%
σ'_θ	1.0000	1.0000	0.0%
Δa	2.5915×10^{-4}	2.5916×10^{-4}	0.004%
Δb	4.1286×10^{-4}	4.1286×10^{-4}	0.0%
Δr_1	0.8925×10^{-4}	0.8925×10^{-4}	0.0%
Δr_2	1.7267×10^{-4}	1.7266×10^{-4}	-0.006%

- 注: 1. σ_θ : 各向异性板的孔边切向正应力;
2. σ'_θ : 各向同性板的孔边切向正应力;
3. Δa : 各向异性板 $\theta=0^\circ$ 点的孔边径向位移;
4. Δb : 各向异性板 $\theta=90^\circ$ 点的孔边径向位移;
5. Δr_1 : $E=E_1$ 的各向同性板的孔边径向位移;
6. Δr_2 : $E=E_2$ 的各向同性板的孔边径向位移。

由图 3 可以看出, 当孔边作用均布压力时, 各向异性板的孔边径向位移大于弹模等于较小弹模的各向同性板的孔边径向位移, 这主要是由于胶合板的剪切模量较小所致。

算例 2 含圆孔无限大板在远处承受水平向均布拉力 $P_x = 1.0 \text{ MPa}$ 。圆孔半径 $r = 1 \text{ m}$, 板边长 $L = 80r$ (图 4)。

孔边切向应力 σ_θ 及孔边径向位移的理论解为⁽⁹⁾:

$$\sigma_\theta|_{\theta=0^\circ} = -\frac{P_x}{k}, \quad \sigma_\theta|_{\theta=90^\circ} = \dot{P}_v(1+n)$$

$$\Delta r|_{\theta=0^\circ} = -\frac{P_x}{E_1}(1+n), \quad \Delta r|_{\theta=90^\circ} = -\frac{P_v}{\sqrt{E_1 E_2}}$$

$$\text{式中: } R = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}, \quad n = \sqrt{2(k - \nu_{12}) + E_1 / G_{12}}$$

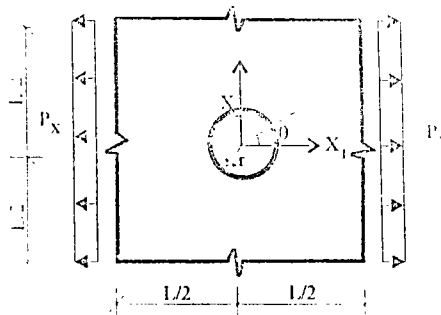
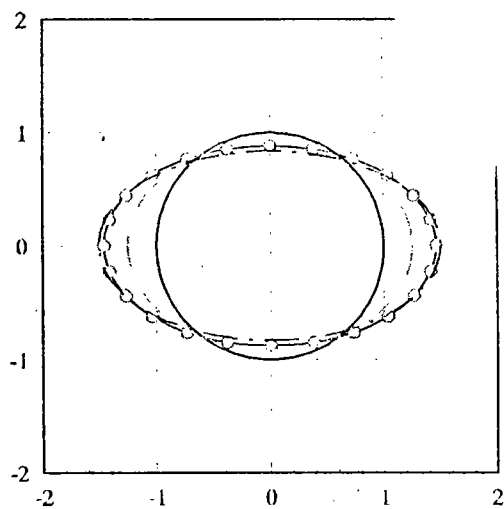


图4 含圆孔无限大板受无穷远处单向拉伸

计算结果绘于图5和图6, 数值比较示于表2, 可见最大计算误差小于千分之五。



PLATF1-Displacement ($\sigma_x = 1$)

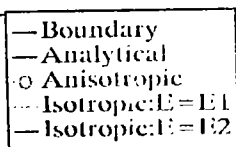
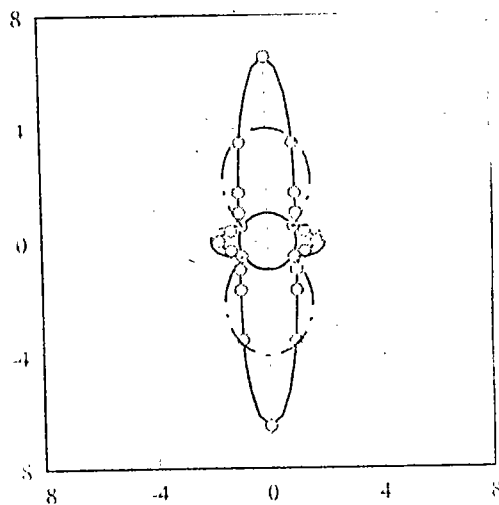


图5 例题二位移图



PLATF1-Stress ($\sigma_x = 1$)

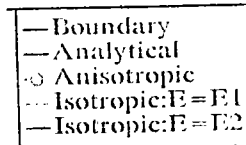


图6 例题二应力图

表2 例题二计算结果与理论解比较表

比较项目	理论解	边界元解	相对误差
$\sigma_{\theta\theta}^I = 0^\circ$	-0.7071	-0.7094	0.33%
$\sigma_{\theta\theta}^I = 90^\circ$	5.4530	5.4563	0.06%
$\sigma_{\theta\theta}^I = 0^\circ$	-1.0	-1.0011	0.11%
$\sigma_{\theta\theta}^I = 90^\circ$	3.0	2.9990	-0.03%
$\Delta r_{i0} = 0^\circ$	4.5442×10^{-4}	4.5546×10^{-4}	0.23%
$\Delta r_{i0} = 90^\circ$	-1.1785×10^{-4}	-1.1832×10^{-4}	0.40%
$\Delta r_{10} = 0^\circ$	2.5×10^{-4}	2.4898×10^{-4}	-0.41%
$\Delta r_{10} = 90^\circ$	-0.8333×10^{-4}	-0.8318×10^{-4}	-0.18%
$\Delta r_{20} = 0^\circ$	5.0×10^{-4}	4.9992×10^{-4}	-0.02%
$\Delta r_{20} = 90^\circ$	-1.6667×10^{-4}	-1.6686×10^{-4}	0.11%

- 注: 1. σ_θ : 各向异性板的孔边切向应力; 2. σ_θ : 各向同性板的孔边切向应力;
 3. Δr : 各向异性板的孔边径向位移; 4. Δr_1 : $E = E_1$ 的各向同性板的孔边径向位移;
 5. Δr_2 : $E = E_2$ 的各向同性板的孔边径向位移。

6 结 论

本文用无限大各向异性平面介质中一点作用单位集中力时的解作为权函数所建立起来的边界单元格式可以求解平面一般各向异性材料的应力及位移。文中给出的算例表明: 边界元法求解应力集中问题具有很高的精度及广泛的适用性。这一方法为复合材料等平面各向异性体的应力分析提供了一个良好的计算手段。

致谢

本文工作得到了清华大学张楚汉教授、王光纶教授的热情指导, 谨致谢忱。

参 考 文 献

- 1 Rizzo, F.J. and Shippy, D.J., A method for stress determination in plane anisotropic elastic bodies. J.Comp. Mater, 4(1970)36-61
- 2 Tomlin, G.R. and Butterfield, R., Elastic analysis of zoned orthotropic continua. Proc. ASCE, EM3(1974)511-529
- 3 Snyder, M.D. and Cruse, T.A., Boundary integral equatin analysis of cracked anisotropic plates. Int. J.Fract. 11(1975)315-328.
- 4 Mahajerin, E.and. Sikarskie, D.L.Boundary element study of a Loaded hole in an orthotropic plate. J.Comp Mater. 20(1986)375-389
- 5 Vable, M. and Sikarskie, D.L., Stress analysis in plane orthoropic material by the boundary element method. Int. J. Solids structures, 24(1988)1-11.
- 6 田宗若, 复合材料中的边界元法,西北工业大学出版社,1992
- 7 Tan, C.L., and Gao, Y.L., Boundary element analysis of plane anisotropic bodies with stress concentrations and cracks. Comp. Structures. 20(1992) 17-28
- 8 Lekhnitskii, S.G. Theory of Elasticity of an Anisotropic Body, Mir Publishers, 1981.
- 9 Lekhnitskii, S.G. 各向异性板(胡海昌译)科学出版社,1963.

(下转第 94 页)

- 2 李世勇, 模糊控制和智能控制理论与应用, 哈尔滨工业大学出版社, 1988年。
- 3 王行愚, 控制论基础, 华东化工学院出版社, 1989年2月。
- 4 W.J.Kickert and H.R.Van Nauta Lemke, The application of fuzzy set theory to control a warm Water plant, Automatica, 12(1976), 301-308.
- 5 Wu zhi qiao, The application of fuzzy control theory to an oil-fueled annealing furnace, Fuzzy sets and Systems, 36(1990), 145-156.
- 6 翟光群, 西安电子科技大学硕士论文, 烧碱蒸发微机控制系统的研制, 1994.11.

The Application of the Fuzzy Controller in Concentration

Measurement for Caustic Soda

Zhai Guangqun

(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: This paper proposes a kind of Fuzzy measurement algorithm for Caustic Soda concentration, based on temperature differential output. Experimental results show that the measurement possesses high accuracy, and is finally realized automatic output caustic soda evaporation.

Keywords: Caustic Soda Evaporation, Concentration Fuzzy Measurement

(上接第 51 页)

Analysis of the Stress Concentration Problem

in Anisotropic Plate with Boundary Element

Wang Bo Dong Yaoxing Wang Zongmin

(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: Using the fundational solution of anisotropic plate as weight function, this paper established the direct boundary element format of general anisotropic problem of plane. So plane problem of orthogonal or general anisotropic material can be solved. The illustration demonstrated that the anisotropic boundary element has higher calculating precision in solving stress concentration problems.

Keywords: anisotropy, plate, boundary element, stress concentration.