

# 双向监督复数旋转码研究\*

王贺明

(郑州工学院水利及环境工程系 450002)

**摘 要:** 本文提出双向监督复数旋转码的概念,并对其纠错能力进行了分析。

**关键词:** 复数旋转码; 计算机通信; 纠错能力

**中图分类号:** TN79

利用电话网模拟信道和高频无线信道进行计算机通信时, 由高斯白噪声引起的随机错误和由强脉冲干扰等引起的突发错误其误码率有时高达  $10^{-2}$ , 从而使通信无法进行, 如果使用差错控制, 在不适宜建立反馈信道的情况下, 使用较好的码字也只能将误码率从  $10^{-2}$  降到  $10^{-5}$ , 但这仍达不到数据传输的技术要求。

本文在分析复数旋转码(以下简称复转码)的基础的, 提出双向监督复转码的组合监督方法, 该方法充分利用第四代计算机计算速度快、存储容量大的特点, 可以将信道误码率降低 4-5 个数量级, 为不能或不适宜建立反馈信道数据通信提供一种有效的差错控制手段。

## 1 双向监督复转码的定义与结构

复数旋转码是按照一定的数学原理构造出来的线性分组码, 它具有编译码简单、使用方便、模块性能好、纠错能力强等特点。双向监督复转码是在复数旋转码的基础上建立起来的一种新型结构复转码, 下面给出它的定义及结构。

**定义:** 一个  $p \times q$  (取  $p = q$ ) 的信息元方阵按文献<sup>[1]</sup>的编码原理生成  $[p^2 + 2tp, p^2, 2t+1]$  的复转码, 形如:

$$\begin{bmatrix} m_{0,0} & m_{0,1} & \cdots & m_{0,p-1} & n_{0,0} & n_{0,1} & \cdots & n_{0,q-1} \\ m_{1,0} & m_{1,1} & \cdots & m_{1,p-1} & n_{1,0} & n_{1,1} & \cdots & n_{1,q-1} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ m_{p-1,0} & m_{p-1,1} & \cdots & m_{p-1,p-1} & n_{p-1,0} & n_{p-1,1} & \cdots & n_{p-1,q-1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

\* 收稿日期: 1995-09-25

其中  $m_{i,k}$  为信息元,  $n_{i,k}$  为监督元, 它们之间的编码约束关系为:

$$n_{i,k} = \begin{cases} \sum_{L=0}^{p-1} M_{(i+kL) \cdot p} L & 0 \leq k \leq p-1 \\ \sum_{L=0}^{p-1} m_{L,i} & k = q-1 = p \end{cases} \quad (2)$$

$r$  个不同信息元的  $p \times p$  阶方阵构成一个三维  $p \times p \times p$  阶立方阵  $M_{p,p,r}$ :

$$M_{p,p,r} = \begin{bmatrix} m_{0,0,r} & m_{0,1,r} & \cdots & m_{0,p-1,r} \\ m_{1,0,r} & m_{1,1,r} & \cdots & m_{1,p-1,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{p-1,0,r} & m_{p-1,1,r} & \cdots & m_{p-1,p-1,r} \end{bmatrix} \quad (3)$$

( $r = 0, 1, 2, \cdots, p-1$ )

其中横向每一个  $p \times p$  阶方阵按照复转码的编码原理正向旋转模 2 和以后所映射的  $p$  个矩阵定义为  $N_{p,p,r}$ :

$$N_{p,p,r} = \begin{bmatrix} n_{0,0,r} & n_{0,1,r} & \cdots & n_{0,p-1,r} \\ n_{1,0,r} & n_{1,1,r} & \cdots & n_{1,p-1,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n_{p-1,0,r} & n_{p-1,1,r} & \cdots & n_{p-1,p-1,r} \end{bmatrix} \quad (r = 0, 1, 2, \cdots, p-1) \quad (4)$$

其中每一个元素山下式求出

$$n_{i,k,r} = \sum_{L=0}^{p-1} \bigcirc [(m_{i,L,r} e^{-j^2 p k \cdot L})] \quad (5)$$

上式中  $r$  代表矩阵纵列 ( $r = 0, 1, 2, \cdots, p-1$ ), 其它各符号所代表的意义参见文献<sup>[1]</sup>.

如果把列向监督元加上, 则构成 (6) 式

$$N_{p,q,p} = \begin{bmatrix} n_{0,0,r} & n_{0,1,r} & \cdots & n_{0,q-1,r} \\ n_{1,0,r} & n_{1,1,r} & \cdots & n_{1,q-1,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n_{p-1,0,r} & n_{p-1,1,r} & \cdots & n_{p-1,q-1,r} \end{bmatrix} \quad (r = 0, 1, \cdots, p-1) \quad (6)$$

列向的每一个元素  $n_{i,q-1,r}$  山下式求出

$$n_{i,q-1,r} = \bigcirc_{L=0}^{p-1} m_{L,i,r} \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, p-1) \quad (7)$$

式 (6) 按模 2 和产生的监督元是在信息元矩阵  $M$  中按行进行的, 若再把信息元立方阵按纵向 [见式 (8)] 模 2 和运算, 则映射矩阵  $N$  将是一个  $p \times p \times (p+1)$  的三维监督阵, 见式 (9)。

$$M'_{p,pr} = \begin{bmatrix} m_{0,k,0} & m_{0,k,1} & \cdots & m_{0,k,p-1} \\ m_{1,k,0} & m_{1,k,1} & \cdots & m_{1,k,p-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{p-1,k,0} & m_{p-1,k,1} & \cdots & m_{p-1,k,p-1} \end{bmatrix} \quad (k=0,1,\cdots,p-1) \quad (8)$$

$$N'_{p,pr} = \begin{bmatrix} n'_{0,k,0} & n'_{0,k,1} & \cdots & n'_{0,k,p-1} \\ n'_{1,k,0} & n'_{1,k,1} & \cdots & n'_{1,k,p-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n'_{p-1,k,0} & n'_{p-1,k,1} & \cdots & n'_{p-1,k,p-1} \end{bmatrix} \quad (k=0,1,\cdots,p-1) \quad (9)$$

其中每一个元素 $n_{i,k,r}$ 山下式求出:

$$n_{i,k,r} = \sum_{L=0}^{p-1} \bigcirc [(m_{i,L,r} e^{-j\frac{2\pi}{p} k \cdot L})] \quad (10)$$

其中 $i, r, k$ 分别表示行、纵列、列, $p$ 表示三维矩阵的阶数。如果把按纵向生成监督元时的列向监督元加上,则构成(11)式。

$$N'_{p,pq} = \begin{bmatrix} n'_{0,k,0} & n'_{0,k,1} & \cdots & n'_{0,k,q-1} \\ n'_{1,k,0} & n'_{1,k,1} & \cdots & n'_{1,k,q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n'_{p-1,k,0} & n'_{p-1,k,1} & \cdots & n'_{p-1,k,q-1} \end{bmatrix} \quad (k=0,1,\cdots,p-1) \quad (11)$$

其中每一个元素 $n_{i,k,q-1}$ 山下式求出:

$$n'_{i,k,q-1} = \bigcirc m_{i,k,i} \quad (12)$$

把以上按横向生成的 $p$ 个监督矩 $N$ 和按纵向生成的 $p$ 个监督矩阵 $N'$ 连同信息元立方阵进行组合,这样就组成了一个完整的双向监督复转码。用图1表示。

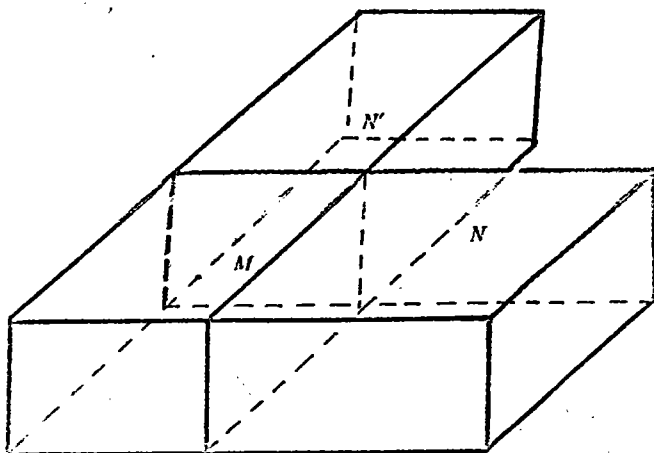


图1 双向监督复转码结构图

双向监督复转码按横向生成的每一个元素山下式求出:

$$n_{i,k,r} = \begin{cases} \sum_{L=0}^{p-1} \odot [(m_{i,L,r} e^{-j\frac{2\pi}{p} k \cdot L}] & (0 \leq k \leq p-1) \\ \bigcirc_{L=0}^{p-1} m_{L,i,r} & (k = q-1 = p) \end{cases} \quad (13)$$

双向监督复转码按纵向生成的每一个元素山下式求出:

$$n'_{i,k,r} = \begin{cases} \sum_{L=0}^{p-1} \odot [(m_{i,L,r} e^{-j\frac{2\pi}{p} k \cdot L}] & (0 \leq k \leq p-1) \\ \bigcirc_{L=0}^{p-1} m_{L,i,r} & (k = q-1 = p) \end{cases} \quad (14)$$

## 2 双向监督复转码的纠错能力分析

定义 1: 在一个双向监督复转码中, 横向上一个 $[p^2+2+p, p^2, 2t+1]$ 复数旋转码 (见图 2) 称为双向监督复转码的横页, 纵向上的一个复转码 (见图 3) 称为双向监督复转码的纵页。

$$\begin{bmatrix} m_{0,0,x} & m_{0,1,x} & \cdots & m_{0,p-1,x} & n_{0,0,y} & n_{0,1,y} & \cdots & n_{0,q-1,y} \\ m_{1,0,x} & m_{1,1,x} & \cdots & m_{1,p-1,x} & n_{1,0,y} & n_{1,1,y} & \cdots & n_{1,q-1,y} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{p-1,0,x} & m_{p-1,1,x} & \cdots & m_{p-1,p-1,x} & n_{p-1,0,y} & n_{p-1,1,y} & \cdots & n_{p-1,q-1,y} \end{bmatrix}$$

其中:  $x = 0, 1, \cdots, p-1$

图 2 双向监督复转码的横页

$$\begin{bmatrix} m_{0,x,0} & m_{0,x,1} & \cdots & m_{0,x,p-1} & n'_{0,x,0} & n'_{0,x,1} & \cdots & n'_{0,x,q-1} \\ m_{1,x,0} & m_{1,x,1} & \cdots & m_{1,x,p-1} & n'_{1,x,0} & n'_{1,x,1} & \cdots & n'_{1,x,q-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{p-1,x,0} & m_{p-1,x,1} & \cdots & m_{p-1,x,p-1} & n'_{p-1,x,0} & n'_{p-1,x,1} & \cdots & n'_{p-1,x,q-1} \end{bmatrix}$$

其中:  $x = 0, 1, \cdots, p-1$

图 3 双向监督复转码的纵页

定义 2: 把图 2 映射到  $x, y, z$  坐标中, 则复数旋转码的三维阵的行、列、纵分别对应三维空间的  $z, y, x$  轴, 按照  $yoz$  方向向纵方向逐页译码的过程称横向译码, 按照  $xoz$  平面向列向逐页译码的过程称纵向译码。

### 2.1 双向监督复转码的纠突发错方案及纠空发错能力分析

根据复数旋转码的译码原理<sup>[1]</sup>可知, 复转码的纠随机错和突发错的能力为:

$$t_c = (p+1)/2 \quad (15)$$

当使用双向监督复转码结构时, 码元通过信道传输的序列采取按  $xoz$  平面列、行的顺序。由于一个横向页译码可以纠  $(p+1)/2$  位错, 即允许在横向复转码的一个平面内最多出现  $(p+1)/2$  位错, 当信道受到某种噪声干扰出现突发错时, 由于码字采用的是纵向方式, 当发生连续的七行错误时, (如图4) 这  $(2p+1)t$  个突发错误分散在横向每页上最多只有七个错误, 这七个错误均落在横向复转码的每一页纠错能力之内, 所以当信道出现突发错误时, 双向监督复转码的纠突发错能力为:

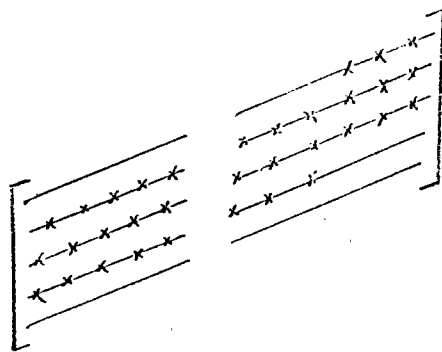


图4

$$t_B = (\text{复转码信息元列长} + \text{复转码监督元列长}) \times \text{复转码纠错能力} \\ = (p + p + 1)t_c = (2p + 1)t_c \quad (16)$$

例如: 取  $p=5$  的  $(55, 25, 7)$  复转码, 把  $25 \times 5$  个信息元按照复转码编码原理构成一个双向监督复转码, 其纠突发错能力为:

$$t_B = (2p+1)t_c = (2 \times 5 + 1) \times 3 = 33 (\text{位})$$

原复转码纠错能力  $t_c = 3$  位, 使用双向监督复转码结构之后, 纠突发错能力提高了 11 倍。

## 2.2 双向监督复转码纠随机错能力分析

构造双向监督复转码是为了达到两次纠错能简单地进行重复纠错, 因为第一次纠错之后, 纠错能力之内的错误被纠正了, 如果不从码结构上生办法, 剩余的错误第二次纠错将不会得到纠正。双向监督复转码并不是简单的重复纠错, 因为第二次纠错时的码结构已不是第一次纠错时的码结构, 原信息元与新的监督元又按新的约束关系建立起不同于第一次纠错时的信息元与监督元的对应关系, 所以经第一次纠错后的剩余误码在新的结构里仍呈随机分布, 所以第二次纠错仍能有效地进行。这里提出的双向监督复转码同于福尼 (Forney) 1966 年提出的级连码, 计算剩余误码率不能引用双级纠错的计算剩余误码率的式子, 必须寻求一种新的计算误码率的方法。

### 2.2.1 剩余误码率寻求过程

构造的双向监督复数旋转码是为了降低数据传输的误码率, 它的译码纠错过程为两次, 首先利用 (17) 式<sup>(1)(2)</sup>:

$$P_{we1} = \sum_{r=1}^n c(n, r) p_e^r (1 - p_e)^{n-r} \quad (17)$$

求出被传输的数据经第一次纠错后的误字率  $P_{we1}$ , 再有 (18) 式

$$P_{e1} = 1 - (1 - P_{we1})^{\frac{1}{n}} \quad (18)$$

若  $P < 1$ , 则

$$P_{e1} \approx \frac{2t+1}{n} \binom{n}{t+1} P_e^{t+1} (1-P_e)^{n-(t+1)} \approx \frac{a}{n} P_{we1}$$

求出第一次纠错后的剩余误码率  $P_{e1}$ , 该误码率表征信息元经第一次纠错后的剩余误码率, 而第二次用于纠错的监督元并没有进行纠错, 所以用于第二次纠错的监督元的误码率仍是信道误码率, 为了进行第二次纠错且求出经两次纠错后的剩余误码率  $P_e$ , 必须求出第二次纠错时信息元与监督元的一致误码率。

### 2.2.2 一致误码率求法

定理: 在双向监督复转码的两次纠错中, 设第一次纠错后的信息元剩余误码率为  $P_{e1}$ , 信道原始误码率为  $P_e$ , 在第二次纠错时, 等效误码率为:

$$P_{e2} = \frac{P}{2P+1} P_{e1} + \frac{P+1}{2P+1} P_e \quad (19)$$

式中  $p$  为复数旋转码的阶数

证明: 设  $P_{e1} = P_e$ , 则 (3-6) 式为

$$\begin{aligned} P_{e2} &= \frac{P}{2P+1} P_{e1} + \frac{P+1}{2P+1} P_e \\ &= \frac{P}{2P+1} P_e + \frac{P+1}{2P+1} P_e = P_e \end{aligned}$$

证毕。

### 2.2.3 双向监督复转码两次纠错后的剩余误码率

设信道误码率为  $P_e$ , 则经第一次纠错后的剩余误码率为:

$$P_{we1} = \sum_{r=t+1}^n c(n,r) P_e^r (1-P_e)^{n-r} \quad (20)$$

由误字率求出剩余误码率:

$$P_{e1} = 1 - (1 - P_{we1})^{\frac{1}{n}} \quad (21)$$

第二次纠错时的一致误码率为:

$$P_{e2} = \frac{P}{2P+1} P_{e1} + \frac{P+1}{2P+1} P_e \quad (22)$$

第二次纠错后的误字率:

$$P_{we2} = \sum_{r=t+1}^n c(n,r) P_{e2}^r (1-P_{e2})^{n-r} \quad (23)$$

第二次纠错后的剩余误码率

$$P'_{e2} \approx 1 - (1 - P_{we2})^{\frac{1}{n}} \quad (24)$$

例: 有一高频散射无线数传信道  $P_e = 10^{-2}$ , 使用 FEC 差错控制, 选用  $p=5$  的 (55, 25, 7) 复数旋转码构成双向监督复转码, 将  $n=55$ ,  $t_c=3$ ,  $p=5$  分别代入 (20)、(21)、(22)、(23)、(24) 式, 分别求出

$$P_{we1} \approx 2.07 \times 10^{-3}$$

$$P_{e1} \approx 3.8 \times 10^{-5}$$

$$P_{e2} \approx 5.46 \times 10^{-3}$$

$$P_{we2} \approx 0.14 \times 10^{-5}$$

$$P'_{e2} \approx 4.3 \times 10^{-6}$$

从上式可以看出, 采用一级纠错, 误码率降低了近3个数量级, 采用两级纠错, 误码率降低了近4个数量级。

又例, 当信道误码率为  $10^{-3}$  时, 经双向监督复转码两级纠错, 最后的剩余误码率为  $2 \times 10^{-8}$ , 将信道误码率降低了近5个数量级。

### 3 结束语

本文根据复数旋转码的数学原理和复数旋转码的编译码原理提出了复数旋转码三维阵和双向监督的概念, 并对其纠错能力进行了分析, 其结果表明, 双向监督复转码在纠错能力上有新的突破, 它不仅为电话模拟信道和无线信道的数传提供了一种较强的纠错方法, 同时为复转码的进一步研究开辟了一条新的途径。

### 参 考 文 献

- 1 靳蕃. 信息论与编码. 中国铁道出版社. 1990.8
- 2 王新梅. 纠错码与差错控制. 人民邮电出版社. 1989.6
- 3 靳蕃. 新型复数旋转码特性分析. 通信学报, Vol. 7, No.2, 1986.3, 62-69
- 4 靳蕃. 复数旋转码的译码原理分析. 西南交通大学学报. No.2, 1987
- 5 H.J.Matt and J.L.Massey. Determining the Burst Error-Correcting limit of cyclic Code. IEEE Trans IT pp. 289-297, 1980
- 6 Joel Effron. Data Communications and Technologies. lifetime learning publications Belmont, Colifornia, 1984

## Study of Two-way Supervised Complex Rotary Codes

Wang Heming

(Zhengzhou Institute of Technology Dept. of water & Environment Eng.)

**Abstract:** In this paper, the idea of two-way supervised Complex codes is proposed, random and burst error correcting capabilities are analyzed.

**Keywords:** Complex codes, Computer communications, error correcting capability