

# 均布荷载作用下矩形悬臂板弯曲新解法\*

许琪楼

(郑州工学院土建系 450002)

**摘 要:** 本文提出了一种能满足悬臂板自由角点条件的挠度表达式及均布荷载作用下的弯曲解, 计算表明这种解法收敛速度快, 计算精度高。

**关键词:** 弹性薄板弯曲, 矩形板, 均布荷载

**中图分类号:** TU31

悬臂板有复杂的边界条件, 要寻求满足平衡微分方程及所有边界条件及角点条件的解答是比较困难的。文献[1]、[2]、[3]曾用不同的方法导出了均布荷载作用下板的挠度解答, 本文提出一种新的、更具有普遍性的求解方法, 可以更方便地解决悬臂板的弯曲。

图1所示边长为  $a$ 、 $b$  的悬臂矩形板, 在板面法向均布荷载  $q$  作用下, 挠度  $W$  应满足下列平衡微分方程。

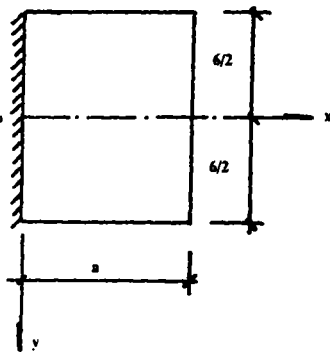


图1 悬臂矩形板

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (1)$$

式中  $D$  为板的抗弯刚度,  $D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$ , 其中  $E$ 、 $\mu$  分别为板的弹性模量及泊松比,  $t$  为板的厚度。

$$\text{设 } W = W_1 + W_2 \quad (2)$$

$W_1$  为方程(1)所对应的齐次方程的通解,  $W_2$  为方程(1)的一个特解, 对图1所示的坐标系, 利用对称性, 取

$$W_1 = \sum_{m=1,3,5,\dots} (B_m \cosh \alpha y + C_m \alpha y \sinh \alpha y) \sin \alpha x + (E_0 x + F_0 + G_0 x^2 + H_0 x^3) + \sum_{n=2,4,\dots} (E_n \sinh \beta x + F_n \cosh \beta x + G_n \beta x \sinh \beta x + H_n \beta x \cosh \beta x) \cos \beta y \quad (3)$$

式中  $\alpha = \frac{m\pi}{2a}$ ,  $\beta = \frac{n\pi}{b}$ ,  $B_m$ 、 $C_m$ 、 $E_n$  (包括  $E_0$ )、 $F_n$  (包括  $F_0$ )、 $G_n$  (包括  $G_0$ )、 $H_n$  (包括  $H_0$ ) 为六个待定常数。

\* 收稿日期: 1995-01-06

$W_1$  表达式中采用了二个级数形式, 第一个级数为  $\sum_{m=1,3,5,\dots} \phi_1(y) \sin \frac{m\pi}{2a} x$ , 第二个级数为  $\sum_{n=0,2,4,\dots} \phi_2(x) \cos \frac{n\pi}{b} y$ . 应当指出: 第二个级数中  $n$  的取值必须从零开始, 因为在  $\left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$  区间上,  $\sum_{n=0,2,4,\dots} \cos \frac{n\pi}{b} y$  才是一个完整的正交三角函数族. 当  $n=0$  时  $\cos \frac{n\pi}{b} y = 1$ , 为防止在引入边界条件后使  $\phi_2(x)$  等于零, 将  $n=0$  时的  $\phi_2(x)$  由双曲函数改为  $x$  的多项式, 可以认为  $E_0, F_0, G_0, H_0$  是  $n=0$  时的  $E_n, F_n, G_n, H_n$ , 因此说  $W_1$  表达式中有六个独立的待定常数.

级数  $\sum_{m=1,3,5,\dots} \sin \frac{m\pi}{2a} x$  在  $[0, a]$  区间上具有下列正交性. 当  $i, j$  为任意正奇数时, 有

$$\int_0^a \sin \frac{i\pi x}{2a} \cdot \sin \frac{j\pi x}{2a} dx = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \frac{a}{2} & (i = j) \end{cases} \quad (4)$$

级数  $\sum_{n=0,2,4,\dots} \cos \frac{n\pi}{b} y$  在  $\left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$  区间上具有下列正交性, 当  $i, j$  为任意正偶数时 (包括零), 有

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cos \frac{i\pi y}{b} \cdot \cos \frac{j\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \frac{b}{2} & (i = j \neq 0) \\ b & (i = j = 0) \end{cases} \quad (5)$$

特解  $W_2$  取

$$W_2 = \frac{q}{24D} (x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2) \quad (6)$$

$W_2$  满足下列边界条件

$$x=0 \text{ 时, } W_2 = 0$$

$$x=0 \text{ 时, } \frac{\partial W_2}{\partial x} = 0$$

$$x=a \text{ 时, } \frac{\partial W_2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2} = 0$$

$$x=a \text{ 时, } \frac{\partial^3 W_2}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 W_2}{\partial x \partial y^2} = 0$$

$$y = \pm \frac{b}{2} \text{ 时, } \frac{\partial^3 W_2}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 W_2}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

显然  $W$  已满足下列自由角点条件:

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)_{x=a, y=\pm \frac{b}{2}} = 0 \quad (7)$$

待定常数仅由边界条件唯一确定。

$W$ 应满足下列边界条件:

$$(W)_{x=0} = 0 \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_{x=a} = 0 \quad (10)$$

$$\left[\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2}\right]_{x=a} = 0 \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0 \quad (12)$$

$$\left[\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y}\right]_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0 \quad (13)$$

将式(3)与式(6)相加, 由(8)式, 有

$$F_0 + \sum_{n=2,4,\dots} \cos \frac{n\pi}{b} y = 0, \text{ 得}$$

$$F_0 = 0 \quad (n=0) \quad (14a)$$

$$F_n = 0 \quad (n=2,4,\dots) \quad (14b)$$

由式(11)得

$$6H_0 + \sum_{n=2,4,\dots} \{E_n(\mu-1)\text{ch}\beta a + F_n(\mu-1)\text{sh}\beta a + G_n[(\mu+1)\text{sh}\beta a + (\mu-1)\beta a \text{ch}\beta a] \\ + H_n[(\mu+1)\text{ch}\beta a + (\mu-1)\beta a \text{sh}\beta a]\} \beta^3 \cos \frac{n\pi}{b} y = 0$$

$$\text{有 } 6H_0 = 0 \quad (n=0) \quad (15a)$$

$$E_n(\mu-1)\text{ch}\beta a + F_n(\mu-1)\text{sh}\beta a + G_n[(\mu+1)\text{sh}\beta a + (\mu-1)\beta a \text{ch}\beta a] \\ + H_n[(\mu+1)\text{ch}\beta a + (\mu-1)\beta a \text{sh}\beta a] = 0 \quad (n=2,4,\dots) \quad (15b)$$

由式(9)和式(10)得:

$$\sum_{m=1,3,5,\dots} (B_m \text{ch}\alpha y + C_m \alpha y \text{sh}\alpha y) \alpha + E_0 + \sum_{n=2,4,\dots} (E_n + H_n) \beta \cos \frac{n\pi}{b} y = 0 \quad (16)$$

$$\sum_{m=1,3,5,\dots} \{B_m(\mu-1)\text{ch}\alpha y + C_m[2\mu \text{ch}\alpha y + (\mu-1)\alpha y \text{sh}\alpha y]\} \alpha^2 \sin \frac{m\pi}{2} + 2G_0 + 6H_0 a \\ + \sum_{m=2,4,\dots} \{E_m(1-\mu)\text{sh}\beta a + F_m(1-\mu)\text{ch}\beta a + G_m[2\text{ch}\beta a + (1-\mu)\beta a \text{sh}\beta a] + H_m[2\text{sh}\beta a$$

$$+ (1 - \mu)\beta a \operatorname{ch} \beta a \} \beta^2 \cos \frac{n\pi}{b} y = 0 \quad (17)$$

利用式(5)的正交性, 将  $\operatorname{ch} \alpha y$  和  $\alpha y \operatorname{sh} \alpha y$  在  $\left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$  区间上展成下列三角级数

$$\operatorname{ch} \alpha y = \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2a} y = \sum_{n=0,2,4,\dots} a_{n2} \cos \frac{n\pi}{b} y = \sum_{n=0,2,4,\dots} a_{n2} \cos \beta y \quad (18)$$

$$\alpha y \operatorname{sh} \alpha y = \sum_{n=0,2,4,\dots} a_{n3} \cos \beta y \quad (19)$$

其中

$$a_{n2} = \begin{cases} \frac{2}{b\alpha} \operatorname{sh} \frac{\alpha b}{2} & (n=0) \\ \frac{4\alpha \operatorname{sh} \frac{\alpha b}{2} \cos \frac{n\pi}{2}}{b(\alpha^2 + \beta^2)} & (n=2,4,\dots) \end{cases} \quad (20)$$

$$a_{n3} = \begin{cases} \operatorname{ch} \frac{\alpha b}{2} - \frac{2}{b\alpha} \operatorname{sh} \frac{\alpha b}{2} & (n=0) \\ \frac{4\alpha \operatorname{sh} \frac{\alpha b}{2} \cos \frac{n\pi}{2}}{b(\alpha^2 + \beta^2)} + \frac{2\alpha^2 \operatorname{ch} \frac{\alpha b}{2} \cos \frac{n\pi}{2}}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{8\alpha^3 \operatorname{sh} \frac{\alpha b}{2} \cos \frac{n\pi}{2}}{b(\alpha^2 + \beta^2)^2} & (n=2,4,\dots) \end{cases} \quad (21)$$

将式(18)、式(19)代入式(16)、式(17), 调换  $m$  和  $n$  的求和次序, 并比较级数各项, 得:

$$\sum_{m=1,3,5,\dots} \alpha (B_m a_{02} + C_m a_{03}) + E_0 = 0 \quad (n=0) \quad (22a)$$

$$\sum_{m=1,3,5,\dots} \alpha (B_m a_{n2} + C_m a_{n3}) + \beta (E_n + H_n) = 0 \quad (n=2,4,\dots) \quad (22b)$$

$$\sum_{m=1,3,5,\dots} \{B_m (\mu - 1) a_{02} + C_m [2\mu a_{02} + (\mu - 1) a_{03}]\} \alpha^2 \sin \frac{m\pi}{2} + 2G_0 + 6H_0 a = 0 \quad (n=0) \quad (23a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1,3,5,\dots} \{B_m (\mu - 1) a_{n2} + C_m [2\mu a_{n2} + (\mu - 1) a_{n3}]\} \alpha^2 \sin \frac{m\pi}{2} + \beta^2 \{E_n (1 - \mu) \operatorname{sh} \beta a \\ & + F_n (1 - \mu) \operatorname{ch} \beta a + G_n [2\operatorname{ch} \beta a + (1 - \mu) \beta a \operatorname{sh} \beta a] + H_n [2\operatorname{sh} \beta a + (1 - \mu) \beta a \operatorname{ch} \beta a]\} = 0 \end{aligned} \quad (n=2,4,\dots) \quad (23b)$$

( $n=2,4,\dots$ ) 式中  $a_{02}$ 、 $a_{03}$  即为  $n=0$  时的  $a_{n2}$ 、 $a_{n3}$ 。

由式(12)得:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1,3,5,\dots} \{B_m (1 - \mu) \operatorname{ch} \frac{\alpha b}{2} + C_m [2\operatorname{ch} \frac{\alpha b}{2} + (1 - \mu) \frac{\alpha b}{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha b}{2}]\} \alpha^2 \sin \frac{m\pi}{2a} x + \mu (2G_0 + 6H_0 x) \\ & \sum_{n=2,4,\dots} \{E_n (\mu - 1) \operatorname{sh} \beta x + F_n (\mu - 1) \operatorname{ch} \beta x + G_n [2\mu \operatorname{ch} \beta x + (\mu - 1) \beta x \operatorname{sh} \beta x] + H_n [2\mu \operatorname{sh} \beta x \\ & + (\mu - 1) \beta x \operatorname{ch} \beta x]\} \beta^2 \cos \frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

$$= -\frac{q\mu}{2D}(x^2 - 2ax + a^2) \quad (24)$$

利用式(4)的正交性, 将式(24)中的非三角函数在  $[0, a]$  区间上展成下列三角级数.

$$\operatorname{sh}\beta x = \operatorname{sh}\frac{n\pi}{b}x = \sum_{m=1,3,5,\dots} b_{m1} \sin\frac{m\pi}{2a}x = \sum_{m=1,3,5,\dots} b_{m1} \sin\alpha x \quad (25)$$

$$\operatorname{ch}\beta x = \sum_{m=1,3,5,\dots} b_{m2} \sin\alpha x \quad (26)$$

$$\beta x \operatorname{sh}\beta x = \sum_{m=1,3,5,\dots} b_{m3} \sin\alpha x \quad (27)$$

$$\beta x \operatorname{ch}\beta x = \sum_{m=1,3,5,\dots} b_{m4} \sin\alpha x \quad (28)$$

$$x^2 = \sum_{m=1,3,5,\dots} d_{m2} \sin\alpha x \quad (29)$$

$$x = \sum_{m=1,3,5,\dots} d_{m1} \sin\alpha x \quad (30)$$

$$x^0 = \sum_{m=1,3,5,\dots} d_{m0} \sin\alpha x \quad (31)$$

其中

$$b_{m1} = \frac{2\beta \operatorname{ch}\beta a \sin\frac{m\pi}{2}}{a(\alpha^2 + \beta^2)} \quad (32)$$

$$b_{m2} = \frac{2(\alpha + \beta \operatorname{sh}\beta a \sin\frac{m\pi}{2})}{a(\alpha^2 + \beta^2)} \quad (33)$$

$$b_{m3} = \frac{2\beta^2 \operatorname{ch}\beta a \sin\frac{m\pi}{2}}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{2\beta(\alpha^2 - \beta^2) \operatorname{sh}\beta a \sin\frac{m\pi}{2} - 4\alpha\beta^2}{a(\alpha^2 + \beta^2)^2} \quad (34)$$

$$b_{m4} = \frac{2\beta^2 \operatorname{sh}\beta a \sin\frac{m\pi}{2}}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{2\beta \operatorname{ch}\beta a \cdot (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \sin\frac{m\pi}{2}}{a(\alpha^2 + \beta^2)^2} \quad (35)$$

$$d_{m2} = \frac{4}{\alpha^2} \left[ -\frac{2}{m\pi} + \sin\frac{m\pi}{2} \right] \quad (36)$$

$$d_{m1} = \frac{2}{a\alpha^2} \sin\frac{m\pi}{2} \quad (37)$$

$$d_{m0} = \frac{2}{a\alpha} \quad (38)$$

将式(25)~式(31)代入式(24), 调换  $n$  和  $m$  的求和次序, 比较级数各项, 得:

$$\alpha^2 \left\{ \beta_m (1 - \mu) \operatorname{ch}\frac{\alpha b}{2} + C_m \left[ 2 \operatorname{ch}\frac{\alpha b}{2} + (1 - \mu) \frac{\alpha b}{2} \operatorname{sh}\frac{\alpha b}{2} \right] \right\} + 2\mu d_{m0} G_0 + 6\mu d_{m1} H_0$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{n=2,4,\dots} \{ E_n (\mu - 1) b_{m1} + F_n (\mu - 1) b_{m2} + G_n [2\mu b_{m2} + (\mu - 1) b_{m3}] + H_n [2\mu b_{m1} \\ & + (\mu - 1) b_{m4}] \} \beta^2 \cos \frac{n\pi}{2} \\ & = - \frac{q\mu}{2D} (d_{m2} - 2ad_{m1} + d_{m0}^2) \end{aligned} \tag{39}$$

由(13)式得;

$$B_m (\mu - 1) \operatorname{sh} \frac{\alpha b}{2} + C_m [(\mu + 1) \operatorname{sh} \frac{\alpha b}{2} + (\mu - 1) \frac{\alpha b}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha b}{2}] = 0 \tag{40}$$

式 (14a、b)、式 (15a、b)、式 (22a、b)、式 (23a、b)、式 (39)、式 (40) 组成一组以待定常数为未知量的线性方程组。计算时,  $W$  表达式中二个级数的取项数要相同, 即当第一个级数取  $m=1, 2, 3$  前三项时, 后一个级数也要取  $=0, 2, 4$  前三项。当级数取前  $K$  项时, 有  $6K$  个待定常数, 由该线性方程组可建立  $6K$  个方程, 由此可求出全部待定常数。

算例: 悬臂正方形板 ( $a=b$ ), 均布荷载  $q$  作用,  $\mu=0.3$ , 表 1 列出各点的挠度系数 (挠度单位:  $qa^4/D$ ), 并与已有的结果和有限元的结果进行比较, 表中  $K$  为级数的取项数。表 2 列出取级数前三项时各点的弯矩系数 (弯矩单位  $q^2 a/D$ 。文献 1 的解是引入广义简支边的概念, 叠加五部分挠度, 且各系数取 24 项时的计算值, 文献 3 的解是级数取九项时的计算值。而本文结果是仅取级数的前三项。由此可见, 本文方法概念清晰, 理论性强, 收敛快, 这种方法具有普遍性, 可以推广到其它边界条件的矩形板弯曲中。

表 1 挠度系数

计算点		本 文 结 果			文献 1 解	文献 3 解	有限元解
		K=1	K=2	K=3			
自由边 $y = \pm \frac{b}{2}$	$\frac{x}{a}$	0.25	0.01231	0.01174	0.01166	0.01195	0.01182
		0.5	0.04288	0.04281	0.04320	0.04433	0.04334
		0.75	0.08224	0.08380	0.08406	0.08505	0.08408
自由边 $x = a$	$\frac{y}{b}$	0.5	0.1247	0.1273	0.1272	0.1293	0.1273
		0.25	0.1274	0.1285	0.1286	0.1306	0.1286
		0	0.1283	0.1290	0.1291	0.1310	0.1291
板中线 $y = 0$	$\frac{x}{a}$	0.75	0.08549	0.08613	0.08620		0.08621
		0.5	0.04538	0.04582	0.04586		0.04587
		0.25	0.01365	0.01376	0.01380		0.01380

表 2 弯矩系数(弯矩单位:  $qa^2/D$ )

计算点	板中线上( $y=0$ )					
	$x/a=0.25$		$x/a=0.5$		$x/a=0.75$	
弯矩方向	$M_x$	$M_y$	$M_x$	$M_y$	$M_x$	$M_y$
本文值	-0.2829	-0.0822	-0.1224	-0.0230	-0.0311	0.0070
有限元值	-0.2809	-0.0806	-0.1212	-0.0234	-0.0296	0.0067

(下转 P100 页)

point of the bridge structure in the design calculation. Using the similar methods of the middle span monment of the same span beam, the equivalent cross loads distribution parameter of the single sheet (beam) of the inclined sheet bridge can be obtained. So the calculation of the radial monment of the inclined bridge is simplified to the calculation of the middle span monment of the one span simple support beam, solving the problem brought in by the hinge. And the method is more simple and practical when compared with other methods. This paper gives an example of the inclined bridge, and through comparison of its results with those of the finite element methods and finite strap methods and other practical calculation methods, the method given in this paper proves to be accurate and practical.

**Keywords:** hinged inclined Bridge. practical

---

(上接 P47 页)

### 参 考 文 献

- 1 张福范, 弹性薄板 (第二版), 科学出版社, 1984
- 2 曲庆璋, 梁兴复, 矩形悬臂板的弯曲, 土木工程学报, 1991年第2期
- 3 林小松, 袁文伯, 用双向三角级数法解悬臂矩形薄板在均布荷载下的弯曲, 应用数学和力学, 1985年第8期.

## New Solution of Rectangular Plate with One Edge Built in Subjected to Uniform Load

Xu Qilou

(Zhengzhou Institute of Technology)

**Abstract:** In the paper the deflection expression satisfying the free corner point conditions of the plate with one edge built in is established and the bending solution is derived subjected to uniform load. The results indicate the method has the advantage of rapidly converging and high precision.

**keywords:** bending of elastic plate, rectangular plate, uniform load