第17卷 第2期 郑州工学院学报 Vol.17 No.2
1996年 6 月 Journal of Zhengzhou Institute of Technology Jun. 1996

关于幂函数 $y=x^{\mu}$ 连续及其求导公式的完整证明

张长春 侯双印

(安阳大学 455000) (郑州工学院数力系 450002)

摘 要: 本文对幂函数 $y=x^{\mu}$(μ为实数)在其定义域内连续及其求导公式均给出了完整的证明，具有一定的理论意义和较高的价值.

关键词: 幂函数，定义域，连续，求导公式.

中图分类号: O51.61

1 关于幂函数 $y=x^{\mu}$ 连续的完整证明

大家知道幂函数 $y=x^{\mu}$ 的定义域随实数 μ 的给定而确定，且 μ 为任何实数时，$y=x^{\mu}$ 在 $(0,+\infty)$ 内总有定义，还知对 $x<0$ 或 $x=0$，$y=x^{\mu}$ 是否有定义与 μ 值有关. 但 $y=x^{\mu}$ 在其定义域内连续，在所有数学文献中均未给出完整的证明，下面对幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 为实数）在其定义域内是连续的给出两个完整的证明.

证法一 下面分三种情形证明:

(1) 当 μ 为任何实数时，$y=x^{\mu}$ 在 $(0,+\infty)$ 内是连续的. 因为这时

$$y=x^{\mu}=e^{\mu\ln x}$$

而由常数连续、对数函数连续、指数函数连续及连续函数的四则运算、复合函数连续的运算法则便知结论是正确的.

(2) 如果 $y=x^{\mu}$ 在点 $x=0$ 处有定义，则 $y=x^{\mu}$ 在点 $x=0$ 处是连续的.

因为要 $y=f(x)=x^{\mu}$ 在点 $x=0$ 处有定义，则必有 $\mu>0$，从而还有 $f(0)=0$. 所以问题就变为证明：当 $\mu>0$ 时，$y=x^{\mu}$ 在 $x=0$ 处是连续的，即证

$$\lim_{x\to 0}x^{\mu}=0 \qquad (\mu>0)$$

因为对任意给定的正数 ε，取 $\delta=\varepsilon^{\frac{1}{\mu}}$，当 $|x|<\delta$(或 $0\leqslant x<\delta$) 都有

$$\left|x^{\mu}\right|=|x|^{\mu}<\varepsilon$$

即
$$\lim_{x\to 0}x^{\mu}=0 \qquad (\mu>0)$$

这就证明了；如果 $y=x^{\mu}$ 在点 $x=0$ 处有定义时，则 $y=x^{\mu}$ 在点 $x=0$ 处是连续的.

(3) 如果 $y=x^{\mu}$ 在 $(-\infty,0)$ 内有定义，则 $y=x^{\mu}$ 在 $(-\infty,0)$ 内是连续的.

因为这时 $y=x^{\mu}=[(-1)(-x)]^{\mu}=(-1)^{\mu}(-x)^{\mu}=(-1)^{\mu}e^{\mu\ln(-x)}$

由常数连续、x 连续、对数函数连续、指数函数连续及连续函数的四则运算、复合函数连续的运算法则便知结论是正确的.

由（1）、（2）、（3）知幂函数 $y=x^{\mu}$(μ 为实数)，在其定义域内是连续的.

收稿日期: 1995 09 16

证法二: 令$F(x)=(x)^{\mu}$, 则当$x\neq=0$时, 有

$$F(x)=e^{\mu}\ln(x)$$

由常数, $|x|$ 对数函数, 指数函数连续及连续函数的四则运算, 复合函数的连续运算法则便知 $F(x)$ 在 $x\neq 0$ 处且 μ 为任何实数是连续的.

$$x^{\mu}=\begin{cases}F(x), & 当x>0且\mu为任何实数时;\\ (-1)^{\mu}F(x), & 当x<0且\mu使x^{\mu}有定义时\end{cases}$$

故当 μ 为任何实数值时, 幂函数 $y=x^{\mu}$ 在 $(0,+\infty)$ 内是连续的; 当 μ 使 $y=x^{\mu}$ 在 $(-\infty,0)$ 内有定义时, $y=x^{\mu}$ 在 $(-\infty,0)$ 内也是连续的.

如果 $y=x^{\mu}$ 在点 $x=0$ 处有定义, 则 $y=x^{\mu}$ 在点 $x=0$ 处是连续的. 其证明见"证法一中的(2)".

综上所述知幂函数 $y=x^{\mu}$(μ 为实数)在其定义域内是连续的.

2 关于幂函数$y=x^{\mu}$的求导公式的完整证明

在所有数学文献中, 对幂函数 $y=x^{\mu}$ (μ 为实数) 的求导公式均未给出完整的证明, 下面给出两个完整的证明, 即对:

$y=x^{\mu}$ (μ为实数) 在导数存在的地方有

$$y'=\mu x^{\mu-1} \tag{*}$$

给出两个完整的证明

证法一 下面分三种情形证明

〔1〕 当$x>0$, μ为任意给定的实数时, (*)式是对的.

因为这时 $y=e^{\mu\ln x}$

所以 $y'=e^{\mu\ln x}(\mu\ln x)'$

$$=x^{\mu}\frac{\mu}{x}=\mu x^{\mu-1}$$

即(*)式是对的.

〔2〕 如果$y=x^{\mu}$在点$x=0$处导数存在, 则

$$(x^{\mu})|_{x=0}=\mu x^{\mu-1}|_{x=0} \quad (\mu\geqslant 1)$$

因为 $y=f(x)=x^{\mu}$ 在点 $x=0$ 处有定义, 则必有 $\mu>0$ 且 $f(0)=0$. 这时

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^{\mu}}{x}=x^{\mu-1}$$

如果$\lim\limits_{x\to0}x^{\mu-1}$ 存在, 即$f(x)=x^{\mu}$ 在点 $x=0$ 处可导, 亦即

$$\lim_{x\to0}x^{\mu-1}=\begin{cases}1, & 当\mu=1时;\\ 0, & 当\mu>1时.\end{cases}$$

这时也有

$$(x^{\mu})'|_{x=0}=\mu x^{\mu-1}|_{x=0} \ (\mu>1)$$
$$x'|_{x=0}=1|_{x=0}=1 \quad (\mu=1)$$

如果规定$0^0=1$, 则有

$$(x^{\mu})'|_{x=0}=\mu x^{\mu-1} \quad x=0 \qquad (\mu\geqslant 1)$$

即结论是对的

〔3〕 如果$y=x^{\mu}$在$(-\infty,0)$内有定义, 则

$$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1} \qquad (-\infty<x<0)$$

因为这时　$y=x^{\mu}=[(-1)(-x)]^{\mu}=(-1)^{\mu}(-x)^{\mu}=(-1)^{\mu}e^{\mu\ln(-x)}$

所以　$y'=(x^{\mu})'=(-1)^{\mu}(e^{\mu\ln(-x)})'$

$$=(-1)^{\mu}e^{\mu\ln(-x)}(\mu\ln(-x))'$$

$$=(-1)^{\mu}(-x)^{\mu}\frac{\mu}{x}=x^{\mu}\frac{\mu}{x}=\mu x^{\mu-1}.$$

即结论是对的

由[1]、[2]、[3]知幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 为实数）在导数存在的地方有

$$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$$

证法二　令 $F(x)=|x|^{\mu}$，则当 $x\neq 0$ 时有 $F(x)=e^{\mu\ln x}$

所以，当 $x\neq 0$ 时，有

$$F'(x)=(e^{\mu\ln x})'=|x|^{\mu}\frac{\mu}{x}$$

而

$$x^{\mu}=\begin{cases}F(x), & \text{当} x>0 \text{且} \mu \text{为任何实数时;}\\ (-1)^{\mu}F(x), & \text{当} x<0 \text{且} \mu \text{使} x^{\mu} \text{有定义时.}\end{cases}$$

所以

$$(x^{\mu})'=\begin{cases}\mu x^{\mu-1}, & \text{当} x>0 \text{且} \mu \text{为任何实数时;}\\ (-1)^{\mu}(-x)^{\mu}\frac{\mu}{x}=\mu x^{\mu-1}, & \text{当} x<0 \text{且} \mu \text{使} x^{\mu} \text{有定义时.}\end{cases}$$

故当 $x>0$ 且 μ 为任何实数时有 $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$；当 μ 使 x^{μ} 在 $(-\infty,0)$ 内有定义时，也有 $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$.

如果 $y=x^{\mu}$ 在点 $x=0$ 处导数存在，则

$$(x^{\mu})'|_{x=0}=\mu x^{\mu-1}|_{x=0}\qquad(\mu\geqslant 1)$$

其证明见“证法一中的[2]”.

综上所述知幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 为实数）在导数存在的地方有

$$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$$

参　考　文　献

1　Γ.M.菲赫金哥尔茨著　微积分学教程(第一卷，第一分册)中译本，1956年，高等教育出版社出版.
2　武汉大学数学系编　数学分析　1978年，人民教育出版社出版.
3　同济大学数学教研室主编　高等数学(第三版)，1989年，高等教育出版社出版.
4　复旦大学数学系陈传璋等编　数学分析(第二版)，高等教育出版社出版.

Complete Proof on the Continuity and Derivative Formula of Power Function　$y=x^{\mu}$

Zhang Changchun　　Hou Shuangyin
(Anyang University)　　(Zhengzhou Institute of Technology)

Abstract: In this paper a Complete proof is given on the continuity on its domain and on the derivative formula of power function $y=x^{\mu}$. Which has certain theoretical significance and higher reference value for teaching.

Keywords: power function, domain continuity, derivative formula.