第 17 卷　第 3 期
1996 年　9　月
郑州工业大学学报
Journal of Zhengzhou University of Technoloy
Vol. 17　No. 3.
Sep.　1996

空间环型区域上的关联函数

刘金禄　　　　左静
（聊城师院）　（郑州工业大学数力系）

摘要：本文利用锥函数方法，给出空间环型区域上关联函数的一种计算方法。
关键词：可拓集合、锥函数、关联函数
中图分类号：O174

引言

1983 年文献[1]为解决不相容问题提出了可拓集合的概念，并给出了刻划可拓集合的关联函数的一般形式。文献[2]～[5]对可拓集合作了深入地研究。这些开创性的工作，为可拓学的创立奠定了坚实的基础。可拓学中的一个重要问题，是怎样建立关联函数，本文试图通过引入锥函数的概念，给出空间环型区域上关联函数①的一种计算方法。

1　空间环型区域的数学表示

设 T 为一个空间环型区域，其边界是一个闭环面。在 T 的内部取定一条绕环心的闭曲线 C_0。如图 1 建立坐标系。过 z 轴作半平面 $\pi(\theta)$。设 $\pi(\theta)$ 与 C_0 交于定点 $P(\theta)$，在 $\pi(\theta)$ 内，以 $P(\theta)$ 为极点，建立平面极坐标系，并使得极轴平行于 Oxy 坐标面，区域 T 与 $\pi(\theta)$ 交于平面区域 $D(\theta)$。则 $D(\theta)$ 用极坐标表示为

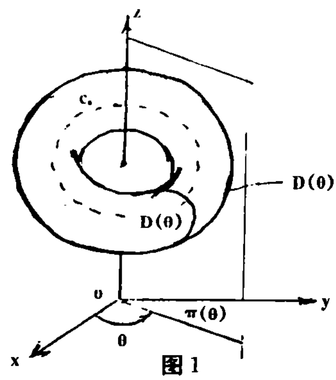

图 1

$$0 \leqslant t < \rho(\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \qquad (1.1)$$

$D(\theta)$ 的边界可表示为 $t=\rho(\varphi)$　　(1.2)

对于半平面 $\pi(\theta)$ 上任一点 Q，设 Q 的向径为 $\vec{r}$，则 $\vec{r}$ 可以表示为

$$\vec{r} = \vec{r}_0(\theta) + \vec{r}(\varphi) \qquad (1.3)$$

其中 $\vec{r}_0(\theta)$ 表示定点 $P(\theta)$ 的向径，$\vec{r}(\varphi)$ 表示 Q 在极坐标系中的向径。于是，空间任一点 Q 关于 T 的位置可以用 $\vec{r}(\varphi)$ 来表征。容易证明下述结论成立。

定理：1.1　对于空间任一点 Q，有

(1) $Q \in T - \partial T$ 的充要条件是 $|\vec{r}(\varphi)| < \rho(\varphi)$；

(2) $Q \in \partial T$ 的充要条件是 $|\vec{r}(\varphi)| = \rho(\varphi)$；

(3) $Q \overline{\in} T \cup \partial T$ 的充要条件是 $|\vec{r}(\varphi)| > \rho(\varphi)$。

收稿日期：1995－03－21

① “区域 A 上的关联函数”为论域 U 上正域为 A 的可拓集合 $\tilde{A}$ 的关联函数[7]

2　半平面 $\pi(\theta)$ 上区域的关联函数

设 $T_0 \subset T$ 为两个空间环型区域，而且它们的边界均为闭环面，两闭环面无公共点，其截面如图 2 所示，C_0 为 T_0 内部绕环心的闭曲线。设 $D_0 \subset D$ 分别为 T_0 和 T 关于 $\pi(\theta)$ 的截面区域。D_0 和 D 的边界用极坐标表示为

$$\partial D_0 : t = \rho_0(\varphi); \qquad \partial D : t = \rho(\varphi) \tag{2.1}$$

现引入 D_0 和 D 的锥函数：取实数

$$h_0 = \sup\rho_0(\varphi), 0 \le \varphi \le 2\pi, h = \sup\rho(\varphi). \qquad o \le \varphi \le 2\pi, \tag{2.2}$$

则 D_0 和 D 的锥函数分别为

$$f_0(\varphi,t) = \begin{cases} h_0(\dfrac{t}{\rho_0(\varphi)} - 1), & 0 \leqslant t < \rho_0(\varphi) \\ t - \rho_0(\varphi), & \rho_0(\varphi) \le t < +\infty \end{cases} \tag{2.3}$$

$$f(\varphi,t) = \begin{cases} h(\dfrac{t}{\rho(\varphi)} - 1), & 0 \leqslant t < \rho(\varphi) \\ t - \rho(\varphi), & \rho(\varphi) \le t < +\infty \end{cases} \tag{2.4}$$

为使点 $Q(\varphi,t)$ 在半平面 $\pi(\theta)$ 内，(φ,t) 的取值集应为

$$G = [0,\frac{\pi}{2}] \times [0, +\infty] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \times [0,\infty) \cup (\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}) \times [0,\frac{d(\theta)}{|COS\theta|}) \tag{2,5}$$

其中 $d(\theta)$ 表示点 $P(\theta)$ 到 Z 轴的距离。

再计算 $\pi(\theta)$ 上任一点 Q 关于 D_0 和 D 的位置值

$$d(t,D_0,D) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < \rho_0(\varphi) \\ f(\varphi,t) - f_0(\varphi,t), & \rho_0(\varphi) \le t < +\infty \end{cases} \tag{2.6}$$

其中 (φ,t) 满足(2,5)。

作函数

$$g(t,\varphi) = \frac{f_0(\varphi,t)}{d(t,D_0,D)} \tag{2.7}$$

则 $g(t,\varphi)$ 具有以下特征，从而是平面 $\pi(\theta)$ 上区域 D_0 的关联函数[7]

定理 2.1　对于半平面 $\pi(\theta)$ 内任一点 Q，$g(t,\varphi)$ 具有特征

(1) $Q \in D_0 - \partial D_0$ 的充要条件是 $g(t,\varphi) > 0$；

(2) $Q \in \partial D_0$ 的充要条件是 $g(t,\varphi) = 0$；

(3) $Q \in D - D_0 - \partial D_0 - \partial D$ 的充要条件是 $-1 < g(t,\varphi) < 0$；

(4) $Q \in \partial D$ 的充要条件是 $g(t,\varphi) = -1$；

(5) $Q \overline{\in} D \cup \partial D$ 的充要条件是 $g(t,\varphi) < -1$。

定理 2.2　在半平面 $\pi(\theta)$ 内，$g(t,\varphi)$ 有最大值，而且最大值为 $g(0,0) = h$。

定理 2.1 和定理 2.2 的证明略。

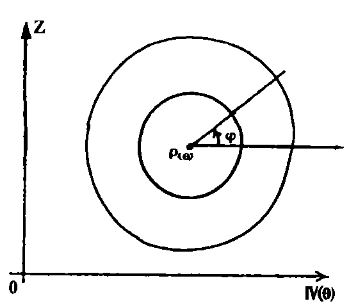

图 2

3　$F(\theta,\varphi,t)$ 的构造

现利用半平面 $\pi(\theta)$ 上的关联函数 $g(t,\varphi)$，作函数

$$F(\theta,\varphi,t)=\begin{cases}-2, & t=\dfrac{d(\theta)}{|\cos\varphi|},\ \dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{3}{2}\pi\\ g(t,\varphi), & (\varphi,t)\in G\end{cases} \tag{3.1}$$

其中，G、$d(\theta)$满足条件(2.5)。

定理3.1 $F(\theta,\varphi,t)$具有以下特性

(1)$Q\in T_0-\partial T_0$ 的充要条件是 $F(\theta,\varphi,t)>0$；

(2)$Q\in\partial T_0$ 的充要条件是 $F(\theta,\varphi,t)=0$；

(3)$Q\in T-T_0-\partial T-\partial T_0$ 的充要条件是 $-1<F(\theta,\varphi,t)<0$；

(4)$Q\in\partial T$ 的充要条件是 $F(\theta,\varphi,t)=-1$；

(5)$Q\bar{\in}T\cup\partial T$ 的充要条件是 $F(\theta,\varphi,t)<-1$。

证明：(必要性)(1)若 $Q\in T_0-\partial T_0$，则 $Q\in D_0-\partial D_0$，由定理2.1知，$g(t,\varphi)>0$，由(3.1)知 $F(\theta,\varphi,t)>0$。

(2)若 $Q\in\partial T_0$，则 $Q\in\partial D_0$，由定理2.1知 $g(t,\varphi)=0$ 且 Q 不在 Z 轴上。由(3.1)知 $F(\theta,\varphi,t)=0$

(3)若 $Q\in T-T_0-\partial T-\partial T_0$，则 $Q\in D-D_0-\partial D-\partial D_0$，由定理2.1知，$-1<g(t,\varphi)<0$，且 Q 不在 Z 轴上。由(3.1)知 $-1<F(Q,\varphi,t)<0$。

(4)若 $Q\in\partial T$，则 $Q\in\partial D$，由定理2.1知，$g(t,\varphi)=-1$，又 Q 不在 Z 轴上，所以由(3.1)知 $F(Q,\varphi,t)=-1$。

(5)若 $Q\bar{\in}T\cup\partial T$，则 $Q\bar{\in}D\cup\partial D$，由定理3.1知 $g(t,\partial)<-1$。再由(3.1)知 $F(Q,\varphi,t)<-1$。

(充分性)(1)若 $F(\theta,\varphi,t)>0$，由(3.1)知 $g(t,\varphi)>0$，由定理2.1知，$Q\in D_0-\partial D_0$，于是 $Q\in T_0-\partial T_0$

(2)若 $F(\theta,\varphi,t)=0$，由(3.1)知 $g(t,\varphi)=0$，由定理2.1知，$Q\in\partial D_0$，于是 $Q\in\partial T_0$。

(3)若 $-1<F(\theta,\varphi,t)<0$，由(3.1)知 $-1<g(t,\varphi)<0$，由定理2.1知 $Q\in D-D_0-\partial D-\partial D_0$，于是 $Q\in T-T_0-\partial T-\partial T_0$。

(4)若 $F(\theta,\varphi,t)=-1$，由(3.1)知 $g(t,\varphi)=-1$，由定理2.1知，$Q\in\partial D$ 于是 $Q\in\partial T$。

(5)若 $F(\theta,\varphi,t)<-1$，由(3.1)知 $g(t,\varphi)<-1$。由定理2.1知，$Q\bar{\in}D-\partial D$。于是 $Q\bar{\in}T-\partial T$。

为考察 $F(\theta,\varphi,t)$ 的极值性质，我们称 T_0 内部的定曲线 C_0 为 $F(\theta,\varphi,t)$ 的脊线。

定理3.2 $F(\theta,\varphi,t)$在$[0.2\pi]\times[0,\pi]\times[0,+\infty]$上有最大值，而且最大值在脊线 C_0 上达到。

证明：由定理3.1知，$F(\theta,\varphi,t)$的最大值只能在 T_0 上达到。当 $Q\in T_0$ 时，有 $F(\theta,\varphi,t)=g(t,\varphi)$，由定理2.2直接可得，$F(\theta,\varphi,t)$的最大值为 h_0。

4 实例

设 T_0 和 T 分别为圆环型区域和椭圆环型区域。它们分别由 Oxz 面上的圆 $(x-3)^2+z^2=1$ 和椭圆 $\dfrac{(x-3)^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$ 绕 Z 轴旋转所围成的。取定曲线 C_0 为圆的圆心轨迹线，现求关联函数 $F(\theta,\varphi,t)$，使之以 T_0 为正域[7]，以 $T-T_0$ 为可拓域，其步骤如下：

(1)利用(2.1)求半平面 $\pi(\theta)$ 上区域 D_0 和 D 的边界方程

$$\partial D_0:\rho_0(\varphi)=1;\qquad \partial D:\rho(\varphi)=\sqrt{4\cos^2\varphi+9\sin^2\varphi} \tag{4.1}$$

由(2.2)可得 $h_0=1,h=3$。

(2)利用(2.3)和(2.4)求 D_0 和 D 的锥函数

$$f_0(\varphi,t)=t-1,\qquad 0\le t<+\infty$$

$$f_0(\varphi,t)=\begin{cases}3(\dfrac{t}{\rho(\varphi)}-1), & 0\le t<\rho(\varphi)\\ t-\rho(\varphi), & \rho(\varphi)\le t<+\infty\end{cases}\tag{4.2}$$

(3)利用(2.6)计算位置值

$$d(t)=\begin{cases}-1, & 0\le t<1\\ 3(\dfrac{t}{\rho(\varphi)}-1)-(t-1), & 1\le t<\rho(\varphi)\\ 1-\rho(\varphi). & \rho(\varphi)\le t<+\infty\end{cases}\tag{4.3}$$

(4)利用(2.7)求 D_0 的关联函数

$$g(t,\varphi)=\begin{cases}1-t, & 0\le t<1\\ \dfrac{(t-1)\rho(\varphi)}{3(t-\rho(\varphi))-\rho(\varphi)(t-1)}, & 1\le t<\rho(\varphi)\\ \dfrac{t-1}{1-\rho(\varphi)}, & \rho(\varphi)\le t<+\infty\end{cases}\tag{4.4}$$

(5)利用(3.5)求(φ,t)的取值范围

$$G=[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,+\infty]\cup(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})\times[0,\frac{3}{|\cos\varphi|}]\cup[\frac{3\pi}{2},2\pi]\times[0,+\infty]$$

(6)利用(3.1)得关联函数

$$F(\theta,\varphi,t)=\begin{cases}-2, & t=\dfrac{3}{|\cos\varphi|}, \quad \dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{3\pi}{2}\\ g(t,\varphi), & (\varphi,t)\in G\end{cases}\tag{4.3}$$

且 $F(\theta,\varphi,t)$的脊线为圆$\begin{cases}x^2+y^2=9\\ z=0\end{cases}$,最大值为 $F(0,0,0)=1$。

参 考 文 献

1 蔡文·可拓集合和不相容问题.科学探索学报,1983.

2 Caiwen · Rusell Paradox and Extension Set:BUSEFAL,1984,No.18

3 Caiwen · Interoductlon of Extension Set · BUSEFAL,1984,No,19.

4 Caiwen · Extension Set,Fuzzy Set and Classical Set · First Congress of International Fuzzy Systems Association. Spain,1985.

5 Caiwen · Mathod of Matter Elements Analysis · BUSEFAL,1984,No.20

6 蔡文·物元分析.广东高等教育出版社,1937.

7 蔡文.物元模型及其应用.北京:科学技术文献出版社,1994.

The relation function on a space trus field

Liu Jinlu Zuo jing

Abstract In this paper, we give a method to establish the relation function on a space trus field, by using the cone function method.

Key words Extension set, cone function, relation function.