第 17 卷　第 3 期　　郑州工业大学学报　　Vol. 17　No. 3.
1996 年　9　月　Journal of Zhengzhou University of Technoloy　Sep.　1996

关于标准误差应用问题的讨论

张　敏　　　　袁　辉
（郑州工业大学数力系）　（河南省计算中心）

摘要　针对在标准误差的应用中容易产生概念混乱问题，首先从理论上给出了四种标准误差的计算公式、含义及其应用条件，进而讨论了测量结果的表示和取位，并以实例进行分析，因此，为正确、规范和统一书写测量结果提供了理论依据。

关键词　测量列，平均值，标准误差，标准偏差，离散性，概率，t 分布
中图分类号　O 241.1

标准误差是当前应用最广泛、最基本的一种随机误差的表示方法，当标准误差求得后，平均误差和极限差即可求得。故国际上普遍采用标准误差作为实验结果质量的数字指标，同时按国际计量局建议，不确定度用标准差 σ 表征（或方差 σ^2 表征）[1]。由此可知，标准误差在数据处理上的作用十分重要。但在目前的测量和检定工作中，甚至在有些实验讲义上，对标准误差的概念还存在着不同程度的混乱现象，为此需要予以澄清。

1　四种标准误差的计算公式

1.1　测量列的标准误差 σ

假设我们对某一物理量 x 进行了 n 次等精度的重复测量，数值为 x_i，其误差为 $\Delta_i=x_i-x_0(i=1,2,\cdots,n)$。测量列的标准误差定义为

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2}{n}}^{[2]} \tag{1}$$

式中 x_0 为被测物理量的真值。σ 的含义是反映该组测量数据的离散性，即测量列中每一个数据的误差落在 $\pm\sigma$ 区间内的概率是 68.3%。由于是等精度测量，所以各测量值的 σ 都是相同的。

上式的应用条件，除了 x_0 是被测量的真值外，测量次数必须很大，才能满足统计规律，此时算得的 σ 值才趋于稳定。当 $n\to\infty$ 时，σ 就趋向于真正的标准误差值。对于有限次测量，其 σ 只是真正标准误差的估计值。

1.2　平均值的标准误差 $\sigma_{\bar{x}}$

当我们进行多次等精度的重复测量时，若用 x_{1i} 及 $\Delta_{1i}=x_{1i}-x_0(i=1,2,\cdots,n)$ 分别表示

收稿日期：1995－10－06

第一组的测量数据及误差，此时很容易算出其平均值 $\bar{x}_1$ 及误差 $\delta_1=\bar{x}_1-x_0$；若用 x_{2i} 及 $\Delta_{2i}=x_{2i}-x_0$ 表示第二组的测量数据及误差，同样可算出其平均值 $\bar{x}_2$ 及误差 $\delta_2=\bar{x}_1-x_0$。假设我们如此测量了 k 组，每组测得 n 个数据，并用 x_{ji} 及 $\Delta_{ji}=x_{ji}-x_0$ 表示第 j 组的测量数据及误差，同样可算出其平均值 $\bar{x}_j$ 及误差 $\delta_j=\bar{x}_j-x_0$。

下面我们来讨论平均值 $\bar{x}_j$ 的标准误差。与前面讨论测量列的标准误差类似，其计算公式为

$$\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{k}\delta_j^2}{k}} \tag{2}$$

由于 $\Delta_{ji}=x_{ji}-x_0$，$\delta_j=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_{ji}$，故对 δ_j 两边平方有：

$$\delta_j^2=\frac{1}{n^2}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Delta_{ji}\Big)^2=\frac{1}{n^2}\Big[\sum_{i=1}^{n}\Delta_{ji}^2+2\sum_{p\neq Q}^{n}\Delta_{jp}\Delta_{jQ}\Big]^{[2]}$$

由于服从统计规律的随机变量具有对称性，故其交叉项的乘积之和为零，即 $\sum_{p\neq Q}^{n}\Delta_{jp}\Delta_{jQ}=0$，代入上式有

$$\delta_j^2=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\Delta_{ji}^2=\frac{1}{n}\sigma_j^2$$

式中 $\sigma_j^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_{ji}^2$ 为第 j 组测量列的标准方差，将上式代入(2)式平方则有

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\delta_j^2=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sigma_j^2$$

由于是等精度测量，因此每组测量数据的标准误差 σ_j 都是相等的，即 $\sigma_1=\sigma_2=\cdots=\sigma_k=\sigma$，或 $\sum_{j=1}^{k}\sigma_j^2=k\sigma^2$。代入上式可得

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{1}{n}\sigma^2$$

或

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sigma=\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2} \tag{3}$$

该式为平均值的标准误差计算公式。$\sigma_{\bar{x}}$ 的含义是反映平均值 $\bar{x}_j$ 的离散性，即每组数据平均值的误差有68.3%的概率落在 $\pm\sigma_{\bar{x}}$ 区间内。该式的适用条件与测量列标准误差的适用条件相同，只是测量列的标准误差随着测量次数的增大而趋向于某个稳定值；平均值的标准误差随着测量次数的增大而逐渐减小，且当 $n\to\infty$ 时 $\sigma_{\bar{x}}\to 0$。故在实验中经常采用增加测量次数 n 减小 $\sigma_{\bar{x}}$ 的方法来减小实验误差。

1.3 测量列的标准偏差 S

在上面所讨论的误差公式中都用到了被测物理量的真值 x_0，而真值实际上是不可能得到的，所以这些公式虽在误差理论中具有重要意义，但却无实用价值。经常采用的方法是用测量列的平均值 $\bar{x}$ 替代真值 x_0；用偏差 $v_i=x_i-\bar{x}$ 替代误差 $\Delta_i=x_i-x_0$。

测量列 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ 的标准偏差计算公式由下面导出。根据误差定义 $\Delta_i=x_i-x_0$ 可得

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta_i=\sum_{i=1}^{n}x_i-nx_0$$

或

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i+x_0$$

将 $\bar{x}$ 值代入偏差公式 $v_i=x_i-\bar{x}$ 有

$$v_i=x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i-x_0=\Delta_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i$$

将等式两边平方

$$v_i^2=\Delta_i^2-2\Delta_i\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i+\frac{1}{n^2}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Delta_i\Big)^2$$

两边求和

$$\sum_{i=1}^{n}v_i^2=\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2-\frac{2}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Delta_i\Big)^2+\frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Delta_i\Big)^2=\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2-\frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Delta_i\Big)^2$$

利用 $\Big(\sum_{i=1}^{n}\Delta_i\Big)^2=\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2+2\sum_{p\neq Q}^{n}\Delta_p\cdot\Delta_Q$ 关系式及 $\sum_{p\neq Q}^{n}\Delta_p\cdot\Delta_Q=0$ 性质可得

$$\sum_{i=1}^{n}v_i^2=\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2=\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2$$

根据标准误差的定义有

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}v_i^2$$

为了与用误差 Δ_i 计算出来的标准误差 σ 相区别,我们把用偏差 v_i 计算出来的标准误差称为标准偏差,并用 S 表示,故上式可写成

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{n-1}}\tag{4}$$

这就是测量列标准偏差的计算公式。其含义与测量列标准误差相同,只不过标准偏差是标准误差的估计值。当 $n\to\infty$ 时,由于 $\bar{x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\to x_0$,则此时的 S 就趋向于 σ。

1.4 平均值的标准偏差 $S_{\bar{x}}$

由于 $\bar{x}$ 是从测量列 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ 计算出来的平均值,因此可以把 $\bar{x}$ 看作一个复合量,它是 x_i 的函数,由平均值定义知

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

所以

$$\frac{\partial\bar{x}}{\partial x_1}=\frac{\partial\bar{x}}{\partial x_2}=\cdots=\frac{\partial\bar{x}}{\partial x_n}=\frac{1}{n}$$

我们假定是 n 次等精度的独立测量,则测量列的标准偏差都相同,令等于 S,且相关系数 $\rho=0$,根据标准误差的传递公式有

$$S_{\bar{x}}^2=\Big(\frac{\partial\bar{x}}{\partial x_1}\Big)^2S_1^2+\Big(\frac{\partial\bar{x}^2}{\partial x_2}\Big)^2S_2^2+\cdots+\Big(\frac{\partial\bar{x}}{\partial x_n}\Big)^2S_n^2$$

$$=\frac{1}{n^2}(S_1^2+S_2^2+\cdots+S_n^2)=\frac{1}{n}S^2$$

或
$$S_{\bar{x}}=\frac{S}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{n(n-1)}} \tag{5}$$

该式为平均值标准偏差的计算公式，其含义与平均值标准误差相同。$S_{\bar{x}}$也是平均值标准误差的估计值，当$n\to\infty$时，平均值的标准偏差$S_{\bar{x}}$就趋向于平均值的标准误差$\sigma_{\bar{x}}$。

总之，在上面我们所讨论的四种标准误差的计算公式中，可分为用误差Δ_i表示的计算公式和用偏差v_i表示的计算公式两大类。每一类又分为测量列误差计算公式和平均值误差计算公式。对这四种不同的误差计算公式，在应用时要分清它们各自的定义、含义及其适用条件，否则就会引起混乱和错误。

还要指出的是，在众多的随机误差的计算公式中，我国和世界上许多国家都在科学报告中使用均方误差[3]（即标准误差）。由于在实际测量中，我们只能得到标准偏差，而标准误差是由标准偏差估算所得，所以，如果不特别指明的话，人们所说的标准误差，就是指标准偏差。

2 测量结果的表示

对于一组等精度的有限次测量数据，其算术平均值比测量列中任何一次测量值都更接近真值x_0，所以用测量列的算术平均值表示测量结果是最合适的。另外，在结果表示中要求，除了给出$\bar{x}$值的大小外，还应给出与其相对应的离散程度即$S_{\bar{x}}$值。故测量结果应表示为

$$x_0=\bar{x}\pm S_{\bar{x}}$$

测量结果如果写成$x_0=\bar{x}\pm\sigma$、$x_0=x\pm\sigma_{\bar{x}}$或$x_0=\bar{x}\pm S$等形式，显然是错误的。因为这些表示方法既混淆了误差与偏差的区别，又混淆了测量列误差与平均值误差的不同。

由于同一组等精度测量数据，可以用不同定义的误差公式来描述，且可得到不同的误差值，所以为了在同一个定义或同一个概率下来比较误差的大小，就应该在实验结果的表示中标明所用误差是什么或其概率P值是多少。同时因为平均值误差与测量次数有关，在测量结果的表示中还应标明n的数值[4]。

即
$$x_0=\bar{x}\pm S_{\bar{x}}(p=0.683,n=?) \tag{6}$$

式中概率$p=0.683$，表示在$\bar{x}\pm S_{\bar{x}}$区间内包含真值x_0的概率为68.3%，此概率亦称为置信水平。

我们知道，用标准偏差来估算标准误差时，要求测量次数必须很大。但在测量次数有限的情况下，测量结果已不遵从正态分布，而是满足t分布。并且测量次数越少，数据的离散性越大，如果还用原标准偏差值的话，其置信水平就会降低，为了达到同样的置信水平，此时标准偏差的范围就要扩大，从而需要用t值对误差项进行修正，其修正方法和结果表示如下：

$$x_0=\bar{x}\pm t_p(\nu)S_{\bar{x}}(P=?,n=?) \tag{7}$$

式中$t_p(\nu)$是在不同置信水平P下随自由度$\nu=n-1$（n为测量次数）而变化的一组数值，当自由度ν和常用置信水平P给出后，其大小可从t分布数值表中查出。在该结果的表示中，也应标明测量次数或自由度，这就等于给出了数据所遵从的分布。同时置信水平不要太低，一般采用90%以上的置信水平为好[5]。

3　误差项及计算结果的取位

误差项应该取几位,这要由误差本身的误差大小来决定。那么标准误差的误差大小应如何确定,其位数应如何选取呢?下面就来讨论这个问题。

如果标准误差是在测量次数无限多的情况下按定义算得的,则此标准误差称为理论标准误差,从理论上说它是个常数,没有误差;如果是有限次测量算得的标准偏差,称为经验标准误差,从理论上讲它是个随机变量,故也有误差。由误差理论可给出标准偏差的标准偏差计算公式

$$\varepsilon = \frac{S_{\bar{x}}}{\sqrt{2(n-1)}} \quad [2] \tag{8}$$

式中 $S_{\bar{x}}$ 为平均值的标准偏差。由(8)式看出,当 $n<10$ 时,有 $\frac{\varepsilon}{S_{\bar{x}}}=\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}>0.24$,即平均值标准偏差的相对误差为 24%以上,所以当 n 小于 10 时,误差项只取一位数就足够精确。

如果欲使误差项取两位数,即平均值标准偏差的相对误差 $\frac{\varepsilon}{S_{\bar{x}}}<10\%$,由(8)式可推算出测量次数 $n>50$ 才行。

从以上分析可知,在实际测量时,由于受条件及时间的限制,测量次数一般都不多(约 10 多次或更少),故可以规定此时的误差项只取一位,除非标准偏差的首位是 1 或 2 时可多取一位,即共取两位。而且在标准偏差截尾时,为了不人为的减小误差,常采用只进不舍法。

关于计算结果有效位数的选取,应由有效数字的运算法则决定[6],如果作为实验结果表示的话,有效数字的位数自然应由误差项的位数来决定,其原则是计算结果的最后一位数要与误差项的末位数对齐。而当计算结果截尾时,则采用“四舍六入五凑偶”法则进行。具体来说就是若被截尾的那个数是 5,而其前一位是奇数时,则进位凑成偶数,如果前一位是偶数时,则将 5 舍去。例如 $\bar{x}=6.4855$,$S_{\bar{x}}=0.034$,若 $n=8$,由前面分析可知误差项只取一位数字,即 $S_{\bar{x}}=0.04$,此时平均值应取三位有效数字,其结果可表示为:$x_0=6.48\pm0.04$;又如若 $S_{\bar{x}}=0.0121$,由于误差项的首位数是 1,故可多取一位,即 $S_{\bar{x}}=0.013$,则此时的平均值应取四位有效数字,其结果应表示为:$x_0=6.486\pm0.013$。

4　例题分析

已知等精度重复测量某长度 L 的数据如下:2.686,2.680,2.678,2.677,2.663,2.672,2.670,2.657(mm)。

求:(1)L 的平均值及其标准偏差

(2)写出置信水平 $P=68.3\%$ 和 $P=95\%$ 的测量结果

解:(1)由定义公式可得:

$$\bar{L}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}L_i=2.673(mm)$$

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n(n-1)}} = 0.0034(mm)$$

由于 $n=8$，故 $S_{\bar{x}}$ 只取一位数字．即 $S_{\bar{x}}=0.004(mm)$。测量结果表示为

$$L_0 = \bar{L} \pm S_{\bar{x}} = 2.673 \pm 0.004(mm) \qquad (P = 0.683, n = 8)$$

(2)已知 $\nu=n-1=7$，从 t 分布数值表中查得 $t_{0.683}(7)=1.08$，$t_{0.95}(7)=2.36$。

故 $L_0=\bar{L}\pm t_{0.683}(7)S_{\bar{x}}=2.673\pm0.005(mm) \quad (P=0.683, n=8)$

$L_0=\bar{L}\pm t_{0.95}(7)S_{\bar{x}}=2.673\pm0.010(mm) \quad (P=0.95, n=8)$

由以上测量结果表示看出：由于测量次数较少($n=8$)，故在同一置信水平 $P=0.683$ 下，用 t 分布修正算出的误差区间比单由标准偏差算出的误差区间大；由第二问可以看出，在测量结果表示中注明置信水平的重要，否则对同一精度的测量结果就会得出前者精度高而后者精度低的错误结论。

参考文献

1 刘智敏．误差分布论．原子能出版社．1988
2 孟尔熹．曹尔第．实验误差与数据处理．上海科学技术出版社．1988
3 潘人培．董玉昌．物理实验教学参考书．高等教育出版社．1987
4 张敏．袁升兴．普物实验中几个误差概念的讨论．郑工高教研究．1992 年第 4 期
5 龚镇雄．普通物理实验中的数据处理．西北电讯工程学院出版社．1985
6 贾山林．姚志亭．袁升兴．大学工科物理实验教程．河南科学技术出版社．1991

DISCUSSION OF APPLICATION PROBLEMS ABOUT STANDARD ERROR

Zhang Min (*Zhengzhou University of Technology*)
Yuan Hui (*Henan Calculation Center*)

Abstract: As the confusion of the concept about standard error is easily caused in apoplication, four kinds of computation formulas, the Meanings and the application conditions about standard error are presented in terms of theory in this paper. The demonstrations and the digits of the measured results are also discussed and analyzed by examples. So this paper provides a theoretical basis for the writing of correct, standard and unified measured results.

Keywords: Measured series, Mean value, Standard error, Standard deviation, Dispersivity, Probability, T-distribution