

自紧厚壁圆筒动力分析

张俊锋

龚育宁

(中国船舶工业总公司第713研究所, 450052) (南京理工大学应用力学系, 210094)

摘 要 本文通过考虑初应力的恢复效应(buoyancy effect)^{[1][2]}建立存在初应力的轴对称弹性动力学方程, 采用特征函数展开法求解了初应力为自紧残余应力时的动态位移和应力, 得到了令人满意的结果。

关键词 弹性动力学 应力波 初应力 厚壁圆筒

中图分类号: O343·4

1 引言

自紧厚壁圆筒是工程中应用极其广泛的一种结构, 它的设计通常是以静态分析为基础的, 但在兵器, 化工和核工业等行业中需要考虑它的动态特性, 由于自紧厚壁圆筒中初应力的存在, 使得这一问题显得十分复杂而一直未能得很好的解决。

2 存在初应力的轴对称弹性动力学方程

对于存在初应力的轴对称问题, 我们切出如图1所示的一个微元体。

在变形前, 微元处于初应力 σ_r^0 , σ_θ^0 作用下的静平衡状态:

$$\frac{d\sigma_r^0}{dr} + \frac{\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0}{r} = 0 \quad (1)$$

在某瞬时 t , 当微元体发生一个径向位移 u 时, 由于初应力的恢复效应, 此时微元表面的应力分量是^[5]:

$$\begin{cases} \sigma_r = \tilde{\sigma}_r + \sigma_r^0 + \frac{u}{r} \sigma_r^0 \\ \sigma_\theta = \tilde{\sigma}_\theta + \sigma_\theta^0 + \frac{\partial u}{\partial r} \sigma_\theta^0 \end{cases} \quad (2)$$

式中的 $\tilde{\sigma}_r$, $\tilde{\sigma}_\theta$ 为动态应力, 它们和微元体位移 u 之间的关系为:

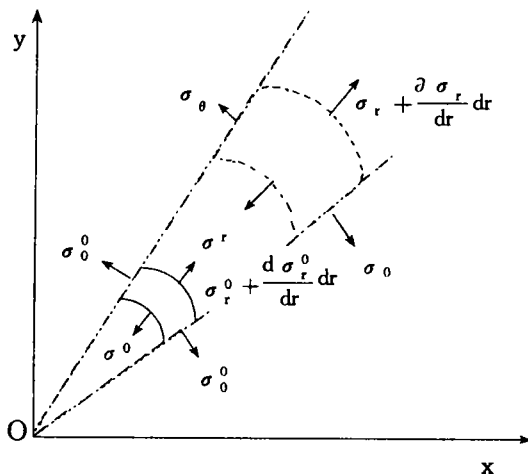


图1 微元体变形与应力图

收稿日期: 1996-11-11

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} \\ \tilde{\sigma}_\theta = \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + (\lambda + 2\mu) \frac{u}{r} \end{cases} \quad (3)$$

这里的 λ, μ 为材料拉梅常数, 式 (2) 中的第三项为初应力的恢复效应产生的动态应力增量^[2]。

由瞬时 t 的动态平衡条件, 同时利用初应力的静平衡关系 (1), 经化简, 略去高阶微量, 就可以得到微元的运动方程:

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_r}{\partial r} + \frac{\tilde{\sigma}_r - \tilde{\sigma}_\theta}{r} + \frac{u}{r} \frac{d\sigma_r^0}{dr} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0}{r} = \rho \ddot{u} \quad (4)$$

根据动态应力和位移之间的关系 (3), 可以把上式改写成用位移表示的形式:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0}{\lambda + 2\mu} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{d\sigma_r^0}{dr} - \frac{1}{r} \right) u = \frac{1}{C_L^2} \ddot{u} \quad (5)$$

其中的 C_L 为纵波波速

$$C_L = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}$$

可以看出, 当不存在初应力时式 (4) 和 (5) 就退化成了一般情况下的轴对称方程。

3 自紧厚壁圆筒动态问题的建立与求解

由于方程 (5) 中含有初应力项 σ_r^0 和 σ_θ^0 , 所以在求解时必须首先给定初应力的具体分布形式。对于理想弹塑性材料, 当自紧过程中不出现反向屈服时, 自紧残余应力为^[3]。

$$\begin{cases} \sigma_r^0 = \begin{cases} \frac{\sigma_s}{2} \left[2 \ln \frac{r}{\rho} - \frac{b^2 - \rho^2}{b^2} - \left(2 \ln \frac{\rho}{a} + \frac{b^2 - \rho^2}{b^2} \right) \left(\frac{a^2}{b^2 - a^2} \right) \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \right], a \leq r \leq \rho \\ \frac{\sigma_s}{2} \left[\frac{\rho^2}{b^2} - \left(2 \ln \frac{\rho}{a} + \frac{b^2 - \rho^2}{b^2} \right) \left(\frac{a^2}{b^2 - a^2} \right) \right] \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right), \rho \leq r \leq b \end{cases} \\ \sigma_\theta^0 = \begin{cases} \frac{\sigma_s}{2} \left[2 \ln \frac{r}{\rho} + \frac{b^2 - \rho^2}{b^2} - \left(2 \ln \frac{\rho}{a} + \frac{b^2 - \rho^2}{b^2} \right) \left(\frac{a^2}{b^2 - a^2} \right) \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \right], a \leq r \leq \rho \\ \frac{\sigma_s}{2} \left[\frac{\rho^2}{b^2} - \left(2 \ln \frac{\rho}{a} + \frac{b^2 - \rho^2}{b^2} \right) \left(\frac{a^2}{b^2 - a^2} \right) \right] \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right), \rho \leq r \leq b \end{cases} \end{cases} \quad (6)$$

上式中的 σ_s 为材料静态屈服极限, a 和 b 表示圆筒的内外壁半径, ρ 是弹塑性区域交界处的圆周半径。

把 (6) 式代入 (5) 式得:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} A(r) \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} A(r) u = \frac{1}{C_L^2} \ddot{u} \quad (7)$$

式中

$$A(r) = \begin{cases} 1 - a_0 + \frac{b_0}{r^2}, & a \leq r \leq \rho \\ 1 + \frac{b_0 - c_0}{r^2} & \rho \leq r \leq b \end{cases} \quad (8)$$

这里的

$$\begin{cases} a_0 = \frac{6s}{\lambda + 2\mu} \\ b_0 = a_0 b^2 (2 \ln \frac{\rho}{a} + \frac{b^2 - \rho^2}{b^2}) (\frac{a^2}{b^2 - a^2}) \\ c_0 = a_0 \rho^2 \end{cases} \quad (9)$$

都是只和结构尺寸, 自紧程度及材料特性有关的常量。

这里, 位移 u 除满足方程 (7) 外, 在弹塑性交界处 ($r=\rho$) 还应满足位移和径向应力 σ_r 连续的条件, 即:

$$\begin{cases} u(\rho^+, t) = u(\rho^-, t) \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} \Big|_{r=\rho^+} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} \Big|_{r=\rho^-} \end{cases} \quad (10)$$

当厚壁圆筒承受动态内压 $p(t)$ 作用时, 边界条件可写为:

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} \Big|_{r=a} = -p(t) \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} \Big|_{r=b} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

另外, 设初始条件为:

$$u(r, 0) = u_0(r), \dot{u}(r, 0) = v_0(r) \quad (12)$$

至此, (7) ~ (12) 式便构成了完备的自紧厚壁圆筒动态问题。对于这一问题, 我们采用特征函数展开法来求解。首先可以把位移 $u(r, t)$ 写成如下形式:

$$u(r, t) = u_s(r, t) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r) q_n(t) \quad (13)$$

其中:

(a) $u_s(r, t)$ 称为准静态解, 它满足齐次方程

$$\frac{d^2 u_s}{dr^2} + \frac{1}{r} A(r) \frac{du_s}{dr} - \frac{1}{r^2} A(r) u_s = 0 \quad (14)$$

及连续性条件和边界条件:

$$\begin{cases} u_s(\rho^+, t) = u_s(\rho^-, t) \\ (\lambda + 2\mu) \frac{du_s}{dr} + \lambda \frac{u_s}{r} \Big|_{r=\rho^+} = (\lambda + 2\mu) \frac{du_s}{dr} + \lambda \frac{u_s}{r} \Big|_{r=\rho^-} \\ (\lambda + 2\mu) \frac{du_s}{dr} + \lambda \frac{u_s}{r} \Big|_{r=a} = -p(t) \\ (\lambda + 2\mu) \frac{du_s}{dr} + \lambda \frac{u_s}{r} \Big|_{r=b} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

方程 (14) 的解为

$$u_s(r, t) = \begin{cases} r[AF(r) + B], & a \leq r \leq \rho \\ r(Ce^{\frac{b_0 - r_0}{2r^2}} + D), & \rho \leq r \leq b \end{cases} \quad (16)$$

其中的

$$F(r) = \int_{\text{const}}^{r^2} t^{-2+\frac{a_0}{2}} e^{\frac{b_0}{2}t} dt \quad (17)$$

式中 A, B, C, D 则可由条件 (15) 求得:

$$\begin{bmatrix} FNI(a) & h_0 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & FNII(b) & h_0 + 1 \\ F(\rho) & 1 & -e^{\frac{b_0 - c_0}{2\rho^2}} & -1 \\ FNI(\rho) & h_0 + 1 & -FNII(\rho) & -h_0 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = -p(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

上式中的

$$\begin{cases} h_0 = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda} \\ FNI(x) = h_0 \left[F(x) + 2x^{-2+a_0} e^{\frac{b_0}{2x^2}} \right] + F(x) \\ FNII(x) = h_0 e^{\frac{b_0 - c_0}{2x^2}} \left(1 - \frac{b_0 - c_0}{x^2} \right) + e^{\frac{b_0 - c_0}{2x^2}} \end{cases} \quad (19)$$

(b) 特征函数 u_m 应满足如下方程:

$$\frac{d^2 U_m}{dr^2} + \frac{1}{r} A(r) \frac{dU_m}{dr} - \frac{1}{r^2} A(r) U_m + k^2 m U_m = 0 \quad (20)$$

及齐次边界条件和连续性条件:

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) \frac{dU_m}{dr} + \lambda \frac{U_m}{r} \Big|_{r=a} = 0 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{dU_m}{dr} + \lambda \frac{U_m}{r} \Big|_{r=b} = 0 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{dU_m}{dr} + \lambda \frac{U_m}{r} \Big|_{r=\rho^+} = (\lambda + 2\mu) \frac{dU_m}{dr} + \lambda \frac{U_m}{r} \Big|_{r=\rho^-} \\ U_m(\rho^+) = U_m(\rho^-) \end{cases} \quad (21)$$

经化简可解得:

$$U(r) = \begin{cases} r^{\frac{a_0}{2}} e^{\frac{b_0}{4r^2}} [AJ_v(kr) + BYv(kr)], & a \leq r \leq \rho \\ e^{\frac{b_0 - c_0}{4r^2}} [CJ_1(kr) + DY_1(kr)], & \rho \leq r \leq b \end{cases} \quad (22)$$

上式中的 J_1, Y_1, J_v, Y_v 分别表示第一阶和第 V 阶的第一、二类贝塞尔函数, $v = \frac{1-a_0}{2}$, 而

A, B, C, D 则可由下式求出:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

其中

$$\begin{cases}
 a_{11} = \left[h_0 \left(\frac{a_0}{2a} - \frac{b_0}{2a^3} \right) + \frac{1}{a} \right] J_v(ka) + h_0 k J'_v(ka) \\
 a_{12} = \left[h_0 \left(\frac{a_0}{2a} - \frac{b_0}{2a^3} \right) + \frac{1}{a} \right] J_v(ka) + h_0 k Y'_v(ka) \\
 a_{13} = a_{14} = 0 \\
 a_{21} = \rho^{\frac{a_0}{2}} J_v(k\rho), a_{22} = \rho^{\frac{a_0}{2}} Y_v(k\rho) \\
 a_{23} = -e^{-\frac{a_0}{4}} J_1(k\rho), a_{24} = -e^{-\frac{a_0}{4}} Y_1(k\rho) \\
 a_{31} = \rho^{\frac{a_0}{2}} \left\{ \left[h_0 \left(\frac{a_0}{2\rho} - \frac{a_0}{2\rho^3} \right) + \frac{1}{\rho} \right] J_v(k\rho) + h_0 k J'_v(k\rho) \right\} \\
 a_{32} = \rho^{\frac{a_0}{2}} \left\{ \left[h_0 \left(\frac{a_0}{2\rho} - \frac{a_0}{2\rho^3} \right) + \frac{1}{\rho} \right] Y_v(k\rho) + h_0 k Y'_v(k\rho) \right\} \\
 a_{33} = -e^{-\frac{a_0}{4}} \left[\left(h_0 \left(\frac{c_0}{2\rho^3} - \frac{b_0}{2\rho^3} \right) + \frac{1}{\rho} \right) J_1(k\rho) + h_0 k J'_1(k\rho) \right] \\
 a_{34} = -e^{-\frac{a_0}{4}} \left[\left(h_0 \left(\frac{c_0}{2\rho^3} - \frac{b_0}{2\rho^3} \right) + \frac{1}{\rho} \right) Y_1(k\rho) + h_0 k Y'_1(k\rho) \right] \\
 a_{41} = a_{42} = 0 \\
 a_{43} = \left(h_0 \frac{c_0 - b_0}{2b^3} + \frac{1}{b} \right) J_1(kb) + h_0 k J'_1(kb) \\
 a_{44} = \left(h_0 \frac{c_0 - b_0}{2b^3} + \frac{1}{b} \right) Y_1(kb) + h_0 k Y'_1(kb)
 \end{cases} \quad (24)$$

为保证齐次方程组 (23) 有解, 就要求

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (25)$$

这就是求解特征值 k_m 的特征方程, 而特征频率 ω_m :

$$\omega_m = k_m C_L \quad (26)$$

更进一步地可以把 (22) 式写成

$$U_m(r) = Am \begin{cases} r^{\frac{a_0}{2}} e^{\frac{b_0}{4r^2}} \epsilon_v(k_m r), & a \leq r \leq \rho \\ C_m e^{\frac{b_0 - c_0}{4r^2}} \epsilon_1(k_m r), & \rho \leq r \leq b \end{cases} \quad (27)$$

其中

$$\begin{cases} \epsilon_v(k_m r) = a_{12} J_v(k_m r) - a_{11} Y_v(k_m r) \\ \epsilon_1(k_m r) = a_{44} J_1(k_m r) - a_{43} Y_1(k_m r) \\ C_m = \frac{a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) - a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})}{a_{43}(a_{23}a_{34} - a_{24}a_{33})} \end{cases} \quad (28)$$

特征函数 $u_m(r)$ 具有正交性:

$$2\pi \int_a^b U_m(r) U_n(r) r dr = \delta_{mn} \quad (29)$$

这里的 δ_{mn} 是 Kronecker 符号。把 (27) 式代入 (29) 式, 利用贝塞尔函数的性质化简得到:

$$A_n = \left\{ \pi b^2 e^{-\frac{a_0}{2}} C_n^2 [\epsilon_1^2 (k_n b) - \epsilon_0 (k_n b) \epsilon_2 (k_n b)] - \pi a^2 \rho^0 [\epsilon_v^2 (k_n a) - \epsilon_{v-1} (k_n a) - \epsilon_{v+1} (k_n a)] + \pi \rho^2 [e^{-\frac{a_0}{2}} C_n^2 \epsilon_0 (k_n \rho) \epsilon_2 (k_n \rho) - \rho^0 \epsilon_{v-1} (k_n \rho) \epsilon_{v+1} (k_n \rho)] \right\} \frac{1}{2} k_n \rho \quad (30)$$

(C) 把准静态解 $u_s(r, t)$ 和特征函数 $U_m(r)$ 代入基本方程 (5) 得到时间函数 $q_m(t)$ 的方程为:

$$\sum_{m=1}^{\infty} [\ddot{q}_m(t) + \omega_m^2 q_m(t)] U_m(r) = -\ddot{u}_s(r, t) \quad (31)$$

利用正交关系 (29) 可将上式写成

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \ddot{Q}(t) \quad (32)$$

其中

$$Q_n(t) = -2\pi \int_a^b u_s(r, t) U_n(r) r dr \quad (33)$$

为获得微分方程 (32) 的定解条件, 把 (13) 式代入初始条件 (12) 式中, 利用正交关系 (29) 可得到:

$$\begin{cases} q_n(0) = 2\pi \int_a^b u_0(r) U_n(r) r dr + Q_n(0) \\ \dot{q}_{(0)} = 2\pi \int_a^b v_0(r) U_n(r) r dr + \dot{Q}_n(0) \end{cases} \quad (34)$$

这样, 方程 (32) 在条件 (34) 下的解可写为:

$$q_n(t) = q_n(0) \cos \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} \dot{q}_{(0)} \sin \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \ddot{Q}_n(\tau) \sin \omega_n (t - \tau) d\tau \quad (35)$$

至此, 把准静态解 (16), 特征函数解 (27) 和时间函数 $q_n(t)$ 的解 (35) 代入式 (13) 就得到了动态问题 (7) ~ (12) 的位移解 $u(r, t)$, 进而利用 (2), (3) 式便可以得到厚壁圆筒中的应力分量。

4 计算结果与分析讨论

通过数值方法我们可以求解出特征方程 (25) 的一系列正根 k_1, k_2, \dots 。由 (26) 式得到特征频率 ω_n 。表 1 列出了在 $b/a=3, \rho=(a+b)/2$ 情况下的前十阶特征频率和相邻两阶特征频率之间的差值 $\Delta\omega$ 。可以看出随着阶数的增高, 差值 $\Delta\omega$ 逐渐趋近于一个恒值。

表 1 前十阶特征频率 ω_n 和 $\Delta\omega$ ($b/a=3, \rho=(a+b)/2$)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\omega_n \text{ (s}^{-1}\text{)}$	2580	8489	16009	23759	31562	39386	47220	55060	62904	70750
$\Delta\omega \text{ (s}^{-1}\text{)}$	5909	7520	7750	7803	7824	7834	7840	7844	7846	

另外, 对于不同的壁厚比 b/a , 厚壁圆筒的特征频率也随之变化。表 2 中列出了不同壁厚比下的第一阶特征频率 ω_1 的变化情况。

表 2 不同壁厚比的第一阶特征频率

b/a	2	4	6	8	10	20	40	60	80	100
$\omega_1\ (s^{-1})$	3284	2129	1560	1219	995	512	258	172	129	103

把表 1、表 2 中的计算结果和文献^[4]相比较,发现由于初应力的存在,使结构的特征频率发生了变化,但在本文给出的自紧初应力下其变化量并不大。这主要和初应力的分布情况有关。

图 2 所示的是 $b/a=3$, $\rho=(a+b)/2$ 情况下结构的前四阶特征振型 U_n , $n=1, 2, 3, 4$ 。

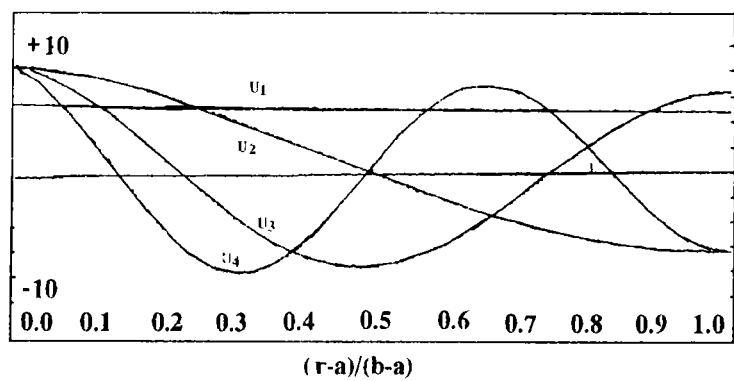
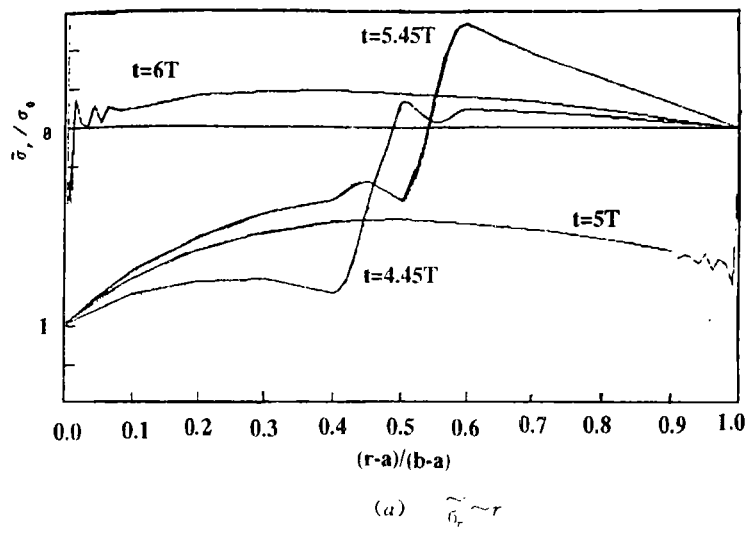


图 2 自紧厚壁圆筒的前四阶基本振型



(a) $\tilde{\sigma}_r \sim r$

在实例计算中,我们选择内压 $p(t)$ 为指数衰减形式,即:

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\beta t}$$

(36)

这里的 βt 取值为 300, 壁厚比 $b/a=2$, $\rho=(a+b)/2$ 。图 3 作出了四个典型时刻 $t=4.45T$,

5T, 5.45T 和 6T ($T=\frac{b-a}{c_L}$) 三个应力分量沿壁厚的分布情况。由图可以清晰地看出应力波沿壁厚的传播情况。在 $t=4.45T$ 和 $t=5.55T$ 两个时刻还反映出了应力波传播中的波头效应。

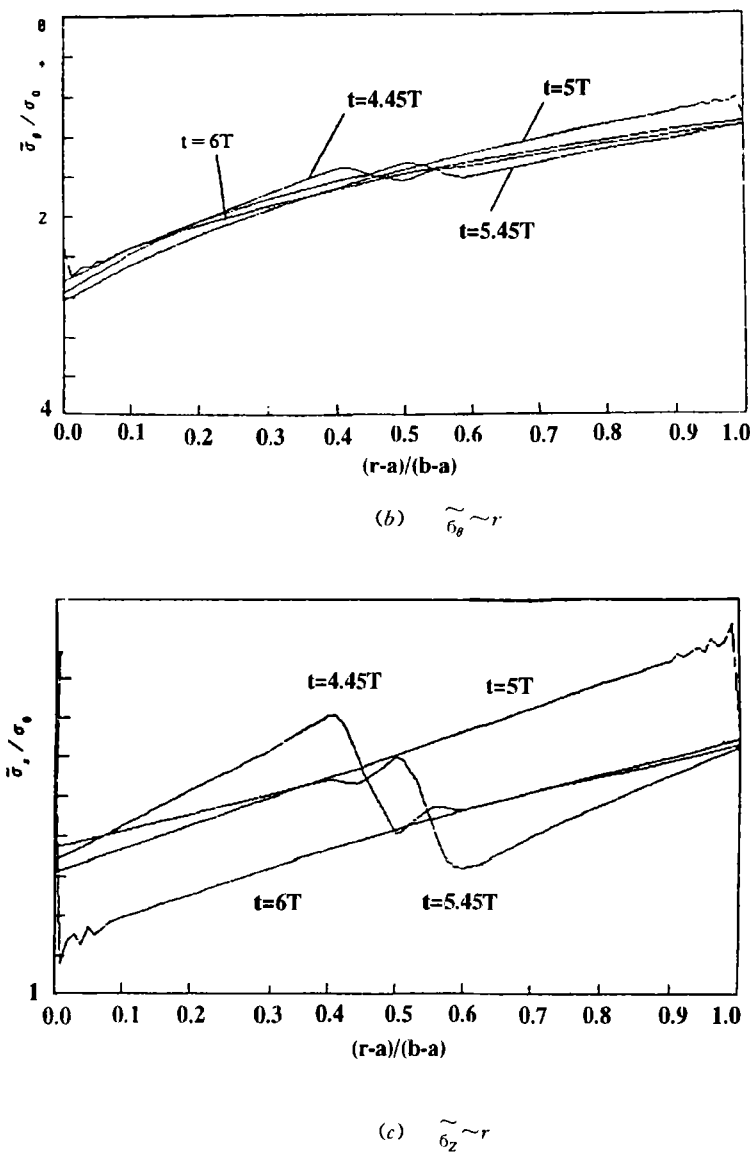
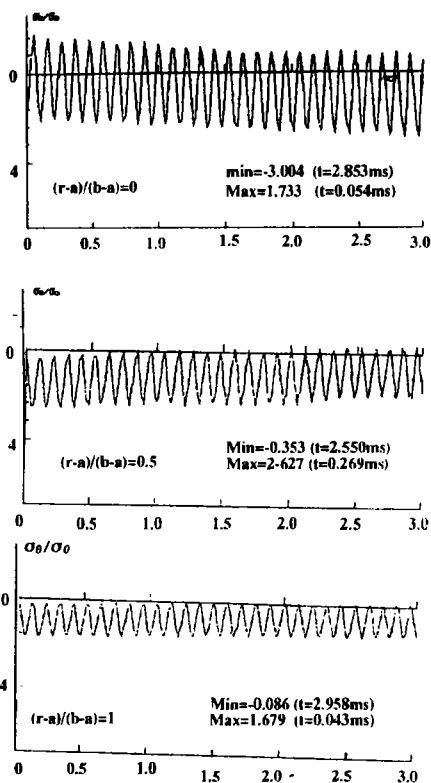
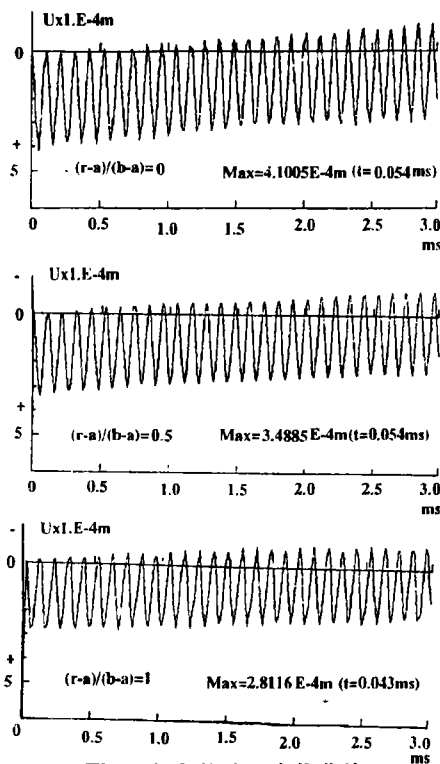


图 3 应力增量分布图

图 4 和图 5 分别给出了厚壁圆筒中三个位置即内壁 ($r=a$)，弹塑性交界层 ($r=\frac{a+b}{2}$) 和外壁 ($r=b$) 的环向应力 σ_θ 和径向位移 u 随时间 t 的变化情况，可以看出这些图线中都呈现出强烈的波动特性。

由上面的实例计算可知，自紧厚壁圆筒中动态应力的特性及其沿壁厚的分布与静态解有很大的区别，在分析和设计动态压力作用下的自紧厚壁圆筒结构时必须加以考虑。

图4 环向应力 σ_θ 变化曲线图5 径向位移 u 变化曲线

参考文献

- 1 Love, A, E, H. The mathematical theory of elasticity, Cambridge Univ. Press, 4th ed, 1927
- 2 Biot, M, A, The influence of initial stress on elastic wave, J, Appl, phys, Vol 11, 1940
- 3 王仁. 塑性力学引论. 北京大学出版社. 1982
- 4 Gong, Y, N, and Wang, X, Radial vibrations and dynamic stresses in elastic hollow cylinders, Structural Dynamics; Recent Advances, Elsevier sci. pub. Ltd, 1991
- 5 自紧厚壁圆筒动态强度分析及其结构优化设计. 张俊锋. 南京理工大学硕士论文. 1993

Dynamic Analysis of Autofretted Hollow Cylinders

Zhang Junfeng

(The 713th Research Institute, CSSC, 450052)

Gong Yuning

(Nanjing University of Science and Technology, 210094)

Abstract Considering the baoyancy effect of initial stress, the axially elastodynamic equation with initial stress is established and formulae of dynamic displacement and stresses in autofretted hollow cylinders are derived by means of eignfunction method in this paper. According to this formulae we obtain satisfied results.

Keywords Elastodynamics, Stress wave, Initial stress, Hollow cylinder