

# 三边支承一边自由的矩形板弯曲<sup>\*</sup>

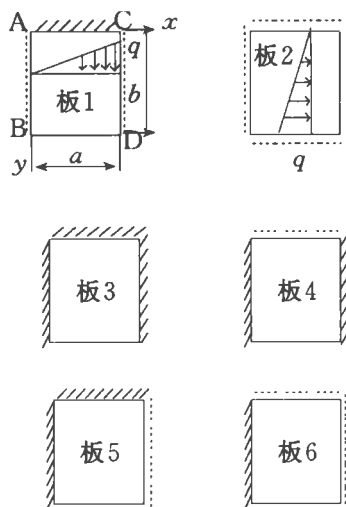
许琪楼 姜 锐 龙晔君  
( 郑州工业大学土建系) ( 河南省轻工业学校)

**摘 要** 采用统一的计算模式解决了三边支承一边自由的 6 种矩形板在板面作用均布荷载、三角形分布荷载,自由边作用分布剪力、分布弯矩、集中力或集中弯矩,简支边作用分布弯矩或集中弯矩时的弯曲。计算表明:这种解法收敛速度快、计算精度高。

**关键词** 弹性薄板弯曲;矩形板

**中图分类号** TU311.4

图 1 所示边长为  $a, b$  的六种矩形板,三边支承(简支或固定),一边自由。对 AB、CD 为简支边的矩形板弯曲可以采用李维解法,对三边固定一边自由的矩形板弯曲, Goriapp 在李维解法的基础上叠加一项附加挠度使问题得以解决(见文献[1]),其它矩形板弯曲尚无可行的求解方法。本文采用一种统一的求解模式可以解决这六种矩形板在板面分布荷载和板边分布荷载作用下以及在自由边作用集中力或集中力偶、简支边作用集中力偶时的弯曲。本文的统一解法与经典的李维解法是相通的,同时还克服了李维解法存在的某些局限性。



## 1 板面分布荷载作用下的弯曲

在板面法向分布荷载作用下挠度  $W$  应满足下列平衡微分方程:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q(x \cdot y)}{D} \quad (1)$$

式中  $D$  为板的抗弯刚度,  $D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$ , 其中  $E$ 、 $\mu$  分别为板的弹性模量及泊松比,  $t$  为板厚。

$$\text{设 } W = W_1 + W_2 \quad (2)$$

$W_1$  为方程(1)所对应的齐次方程的通解,  $W_2$  为方程(1)的一个特解。为表示板的双向

<sup>\*</sup> 河南省自然科学基金资助项目

收稿日期:1997-01-13

弯曲变形,通解  $W_1$  是包含 8 个待定常数的双向单三角级数,取

$$W_1 = \sum_{m=1,2,3} (A_m \operatorname{sh} \alpha + B_m \operatorname{ch} \alpha + C_m \alpha \operatorname{sh} \alpha + D_m \alpha \operatorname{ch} \alpha) \sin \alpha + \sum_{n=1,3,5} (E_n \operatorname{sh} \beta + F_n \operatorname{ch} \beta + G_n \beta \operatorname{sh} \beta + H_n \beta \operatorname{ch} \beta) \sin \beta \quad (3)$$

式中  $\alpha = \frac{m\pi}{a}$ ,  $\beta = \frac{n\pi}{2b}$ ,  $A_m, B_m, C_m, D_m, E_n, F_n, G_n, H_n$  为 8 个待定常数。 $W_1$  表达式中采用了级数  $\sum_{m=1,2,3} \sin \frac{m\pi}{a} x$  和  $\sum_{n=1,3,5} \sin \frac{n\pi}{2b} y$ , 前者在  $x=0$  和  $x=a$  时其值为零,符合二边界均为支承边的变形特点;后者在  $y=0$  时级数值为零而在  $y=b$  时级数值不为零,符合一边界为支承边另一边为自由边的变形特点。这二个级数分别在  $[0, a]$  和  $[0, b]$  区间上具有下列正交性:

当  $i, j$  为任意正整数时,有

$$\int_0^a \sin \frac{i\pi}{a} x \cdot \sin \frac{j\pi}{a} x dx = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \frac{a}{2} & (i = j) \end{cases} \quad (4)$$

当  $i, j$  为任意正奇数时,有

$$\int_0^b \sin \frac{i\pi}{2b} y \cdot \sin \frac{j\pi}{2b} y dy = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \frac{b}{2} & (i = j) \end{cases} \quad (5)$$

特解  $W_2$  除满足平衡微分方程外,在每条边界上至少要满足一个边界条件,应满足的条件与通解  $W_1$  所采用的级数形式有一定的对应关系。在  $x=0$  和  $x=a$  时,级数  $\sum_{m=1,2,3} \sin \frac{m\pi}{a} x$  的零阶导数和二阶导数值为零,这要求  $W_2$  在  $x=0$  和  $x=a$  时应满足相应  $x$  的零阶导数或二阶导数的边界条件,且要优先满足低阶导数的边界条件。而级数  $\sum_{n=1,3,5} \sin \frac{n\pi}{2b} y$  在  $y=0$  时零阶导数和二阶导数值为零,在  $y=b$  时一阶导数和三阶导数值为零,要求  $W_2$  在  $y=0$  时应满足相应  $y$  的零阶导数或二阶导数的边界条件,在  $y=b$  时应满足相应  $y$  的一阶导数或三阶导数的边界条件,其理由见后文分析。 $W_2$  在边界上应满足下列边界条件:

$$\left. \begin{aligned} x=0 \text{ 时}, W_2 &= 0 \\ x=a \text{ 时}, W_2 &= 0 \\ y=0 \text{ 时}, W_2 &= 0 \\ y=b \text{ 时}, \frac{\partial W_2}{\partial y^3} + (2-u) \frac{\partial W_2}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

当板面作用均布荷载  $q$  时,取:

$$W_2 = \frac{q}{8D} (x^2 - ax)(y^2 - 2by) \quad (7)$$

当板面作用图 1 所示沿  $x$  方向变化的三角形分布荷载时,取:

$$W_2 = \frac{q}{24Da} (x^3 - a^2x)(y^2 - 2by) \quad (8)$$

当板面作用图 1 所示沿  $y$  方向变化的三角形分布荷载时,取:

$$W_2 = \frac{(2-u)q}{12D(3-2u)b} \left\{ y^3(x^2 - ax) - \frac{y}{2(2-u)} \left[ x^4 - 2ax^3 + 6b^2(2-u)x^2 + [a^3 - 6ab^2(2-u)]x \right] \right\} \quad (9)$$

$W_1$  表达式中的待定常数可由四边的边界条件唯一确定。

由  $x=0, x=a, y=0$  时  $W=0$  及  $y=b$  时  $V_y=0$  的边界条件, 有

$$F_n = 0 \tag{10}$$

$$E_n \operatorname{sh} \beta \alpha + E_n \operatorname{ch} \beta \alpha + G_n \beta \alpha \operatorname{sh} \beta \alpha + H_n \beta \alpha \operatorname{ch} \beta \alpha = 0 \tag{11}$$

$$B_m = 0 \tag{12}$$

$$\alpha \left\{ A_m (\mu - 1) \operatorname{ch} \alpha + B_m (\mu - 1) \operatorname{sh} \alpha + C_m [(\mu + 1) \operatorname{sh} \alpha + (\mu - 1) \alpha \operatorname{ch} \alpha] \right. \\ \left. + D_m [(\mu + 1) \operatorname{ch} \alpha + (\mu - 1) \alpha \operatorname{sh} \alpha] \right\} = 0 \tag{13}$$

其它边界条件所对应的线性方程见表 1 所示。

表 1 边界条件和荷载条件对应的方程式

| 边界条件   | 荷载条件      | 方程式<br>编号 | 方程式左端系数项   | 左端常数项   |
|--|-----------|-----------|--|---|
| $x=0$ 时<br>$\frac{\partial W}{\partial x}=0$     | 均布荷载      | 14-1      |  | $\frac{qa}{8D}(C_2-2bC_1)$  |
|  | $x$ 向三角荷载 | 14-2      | $\alpha(A_m \alpha^1 + B_m \alpha^2 + C_m \alpha^3 + D_m \alpha^4) + \beta(E_n + H_n)$   | $\frac{qa}{24D}(C_2-2bC_1)$   |
|  | $y$ 向三角荷载 | 14-3      |  | $A \{ aC_3 + \frac{C_1}{2(2-\mu)} \cdot [a^3 - 6ab^2(2-\mu)] \}$                  |
| $x=0$ 时<br>$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0$ | 均布荷载      | 15-1      |  | $-\frac{q}{4D}(C_2-2bC_1)$  |
|  | $x$ 向三角荷载 | 15-2      | $\beta(F_n + 2G_n)$  | 0   |
|  | $y$ 向三角荷载 | 15-3      |  | $A \{-2C_3 + 6b^2C_1\}$   |
| $x=a$ 时<br>$\frac{\partial W}{\partial x}=0$     | 均布荷载      | 16-1      | $\alpha(A_m \alpha^1 + B_m \alpha^2 + C_m \alpha^3 + D_m \alpha^4) \cdot \cos m\pi + \beta[E_n \operatorname{ch} \beta a + F_n \operatorname{sh} \beta a + G_n (\operatorname{sh} \beta a + \beta a \operatorname{ch} \beta a) + H_n (\operatorname{ch} \beta a + \beta a \operatorname{sh} \beta a)]$ | $-\frac{qa}{8D}(C_2-2bC_1)$   |
|  | $x$ 向三角荷载 | 16-2      |  | $-\frac{qa}{12D}(C_2-2bC_1)$  |
|  | $y$ 向三角荷载 | 16-3      |  | $A \{ -aC_3 - \frac{C_1}{2(2-\mu)} \cdot [a^3 - 6ab^2(2-\mu)] \}$                 |
| $x=a$ 时<br>$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0$ | 均布荷载      | 17-1      | $\beta[(E_n \operatorname{sh} \beta a + F_n \operatorname{ch} \beta a) + G_n(2 \operatorname{ch} \beta a + \beta a \operatorname{sh} \beta a) + H_n(2 \operatorname{sh} \beta a + \beta a \operatorname{ch} \beta a)]$   | $-\frac{q}{4D}(C_2-2bC_1)$  |
|  | $x$ 向三角荷载 | 17-2      |  | $-\frac{q}{4D}(C_2-2bC_1)$  |
|  | $y$ 向三角荷载 | 17-3      |  | $A \{-2C_3 + 6b^2C_1\}$   |
| $y=0$ 时<br>$\frac{\partial W}{\partial y}=0$     | 均布荷载      | 18-1      |  | $\frac{qb}{4D}(d_2-ad_1)$   |
|  | $x$ 向三角荷载 | 18-2      | $\alpha(A_m + D_m) + \beta(E_n b^1 + F_n b^2 + G_n b^3 + H_n b^4)$   | $\frac{qb}{12Da}(d_3-a^2d_1)$   |
|  | $y$ 向三角荷载 | 18-3      |  | $\frac{A}{2(2-\mu)} \{ d_4 - 2ad_3 + 6b^2(2-\mu)d_2 + [a^3 - 6ab^2(2-\mu)]d_1 \}$ |

(续表 1)

| 边界条件   | 荷载条件      | 方程式<br>编号 | 方程式左端系数项  | 左端常数项   |
|--|-----------|-----------|---|---|
| $y=0$ 时<br>$\frac{\partial W}{\partial y^2}=0$ | 均布荷载      | 19-1      |   | $-\frac{q}{4D}(d^2-ad^1)$   |
|  | $x$ 向三角荷载 | 19-2      | $\alpha^2(B_m+2C_m)$  | $-\frac{q}{12Da}(d^3-a^2d^1)$   |
|  | $y$ 向三角荷载 | 19-3      |   | 0   |
| $y=b$ 时<br>$M_y=0$                             | 均布荷载      | 20-1      | $\alpha^2\{A_m(1-m)\operatorname{sh}\alpha+B_m(1-\mu)\operatorname{ch}\alpha\}+C_m[2\operatorname{ch}\alpha+(1-\mu)\alpha\operatorname{sh}\alpha]+D_m[2\operatorname{sh}\alpha+(1-u)\alpha\operatorname{ch}\alpha]\}$<br>$+E_n(\mu-1)b_1+F_n(\mu-1)b_2+G_n[2\mu_2+(\mu-1)b_3]+H_n[2\mu_1+(\mu-1)b_4]\sin\frac{n\pi}{2}$ | $-\frac{q}{4D}(d^2-ad^1-\mu^2ab)$<br>$-\frac{q}{12Da}[\alpha^3+3\mu^2d^1]$<br>$-A[6b(1-\frac{\mu}{2\sin\frac{n\pi}{2}})(d^2-ad^1)-4\mu^2d^0]$ |
|  | $x$ 向三角荷载 | 20-2      |   |   |
|  | $y$ 向三角荷载 | 20-3      |   |   |

表中  $A=\frac{(2-\mu)q}{12Db(3-2\mu)}$ ;  $a^1、a^2、a^3、a^4、c^3、c^2、c^1$  分别为  $\operatorname{sh}\alpha、\operatorname{ch}\alpha、\alpha\operatorname{sh}\alpha、\alpha\operatorname{ch}\alpha、y^3、y^2、y$  在  $[0,b]$  区间上对  $\sin\beta y$  的展开系数;  $b_1、b_2、b_3、b_4、d^4、d^3、d^2、d^1、d^0$  分别为  $\operatorname{sh}\beta x、\operatorname{ch}\beta x、\beta x\operatorname{sh}\beta x、\beta x\operatorname{ch}\beta x、x^4、x^3、x^2、x、x^0$  在  $[0,a]$  区间上对  $\sin\frac{m\pi}{a}x$  的展开系数,其值分别为:

$$a^1=\frac{2\alpha\operatorname{ch}\alpha\sin\frac{n\pi}{2}}{b(\alpha+\beta)}$$

(21)

$$a^2=\frac{2(\beta+\alpha\operatorname{sh}\alpha\sin\frac{n\pi}{2})}{b(\alpha+\beta)}$$

(22)

$$a^3=\frac{2\alpha^2\operatorname{ch}\alpha\sin\frac{n\pi}{2}}{\alpha+\beta}+\frac{2\alpha\beta-\alpha^2\operatorname{sh}\alpha\sin\frac{n\pi}{2}-4\alpha^2\beta}{b(\alpha+\beta)^2}$$

(23)

$$a^3=\frac{2\alpha^2\operatorname{ch}\alpha\sin\frac{n\pi}{2}}{\alpha+\beta}+\frac{2\alpha\beta-\alpha^2\operatorname{ch}\alpha\sin\frac{n\pi}{2}}{b(\alpha+\beta)^2}$$

(24)

$$c^3=\frac{6}{\beta}(b-\frac{2}{\beta b})\sin\frac{n\pi}{2}$$

(25)

$$c^3=\frac{4}{\beta}(\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{n\pi})$$

(26)

$$c^1=\frac{2}{\beta b}\sin\frac{n\pi}{2}$$

(27)

$$b_1=-\frac{2\alpha\operatorname{ch}\beta\cos m\pi}{a(\alpha+\beta)}$$

(28)

$$b_2 = - \frac{2\alpha \operatorname{ch} \beta \operatorname{acosm} \pi - 1}{a(\alpha + \beta)} \tag{29}$$

$$b_3 = - \frac{2\alpha \operatorname{sh} \beta \operatorname{acosm} \pi}{\alpha^2 + \beta} + \frac{4\alpha \beta (\operatorname{ch} \beta \operatorname{acosm} \pi - 1)}{a(\alpha + \beta)^2} \tag{30}$$

$$b_4 = - \frac{2\alpha \operatorname{ch} \beta \operatorname{aconm} \pi}{\alpha^2 + \beta} + \frac{4\alpha \beta \operatorname{sh} \beta \operatorname{acosm} \pi}{a(\alpha + \beta)^2} \tag{31}$$

$$d_4 = - \frac{2}{\alpha} (a^3 - \frac{12a}{\alpha}) \operatorname{Cosm} \pi - \frac{48}{\alpha a} (\operatorname{cosm} \pi - 1) \tag{32}$$

$$d_3 = \frac{2}{\alpha} (\frac{6}{\alpha} - a^2) \operatorname{cosm} \pi \tag{33}$$

$$d_2 = - \frac{2a}{\alpha} [\operatorname{cosm} \pi + \frac{2(1 - \operatorname{cosm} \pi)}{(m \pi)^2}] \tag{34}$$

$$d_1 = - \frac{2}{\alpha} \operatorname{cosm} \pi \tag{35}$$

$$d_0 = \frac{2}{\alpha} (1 - \operatorname{cosm} \pi) \tag{36}$$

对图 1 所示的 6 种矩形板, 无论是均布荷载还是三角形分布荷载, 求解待定常数的线性方程组中均包含有式( 10) ~ ( 13) 。另外 4 个方程要由边界条件及荷载条件取用, 见表 2 示。

表 2 不同板型所对应的方程式

| 边界条件   | 板 1            | 板 2            | 板 3            | 板 4            | 板 5            | 板 6            |
|--|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $x=0$ 时, $\frac{\partial W}{\partial x}=0$     |                |                | 式( 14-1, 2, 3) | 式( 14-1, 2, 3) | 式( 14-1, 2, 3) | 式( 14-1, 2, 3) |
| $x=0$ 时, $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0$ | 式( 15-1, 2, 3) | 式( 15-1, 2, 3) |                |                |                |                |
| $x=a$ 时, $\frac{\partial W}{\partial x}=0$     |                |                | 式( 16-1, 2, 3) | 式( 16-1, 2, 3) |                |                |
| $x=a$ 时, $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0$ | 式( 17-1, 2, 3) | 式( 17-1, 2, 3) |                |                | 式( 17-1, 2, 3) | 式( 17-1, 2, 3) |
| $y=0$ 时, $\frac{\partial W}{\partial y}=0$     | 式( 18-1, 2, 3) |                | 式( 18-1, 2, 3) |                | 式( 18-1, 2, 3) |                |
| $y=0$ 时, $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=0$ |                | 式( 19-1, 2, 3) |                | 式( 19-1, 2, 3) |                | 式( 19-1, 2, 3) |
| $y=b$ 时, $M_y=0$                               | 式( 20-1, 2, 3) | ( 20-1, 2, 3)  | ( 20-1, 2, 3)  | ( 20-1, 2, 3)  | ( 20-1, 2, 3)  | ( 20-1, 2, 3)  |

注: 作用均布荷载时用式 ( \* \* - 1) , 作用  $x$  向三角荷载时用式 ( \* \* - 2) , 作用  $y$  向三角荷载时用式 ( \* \* - 3) 。

在式 ( 10) ~ 式 ( 13) 中不包含任一个非三角函数的展开系数, 是精确方程; 其余公式均包含有非三角函数的展开系数, 是近似方程。研究表明: 这 4 个精确方程的存在是确保数值收敛的必要条件, 为此要求特解  $W_2$  在每条边界上至少要满足一个边界条件, 应满足的条件与通解  $W_1$  所采用的三角级数形式有一定的对应关系, 如前所述。

算例 1: 图 2 所示的正方形板, 承受板面分布荷载作用,  $\mu=0.3$ 。表 3 列出当级数取前三项时对应图中各点的挠度系数 ( 挠度单位  $qa^4/D$  ) 和弯矩系数 ( 弯矩单位  $qa^2/D$  ) , 并与已有的理论值或有限元值进行比较, 两者是吻合的。

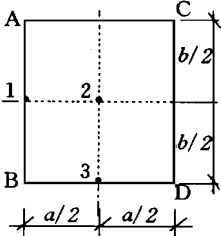


图 2 承受板面分布荷载的正方形板

表 3 挠度系数和弯矩系数

| 边界<br>条件 | 计算 | 类<br>别 | 均布荷载     |                      | $x$ 方向三角荷载 |          | $y$ 方向三角荷载 |          |
|----------|----|--------|----------|----------------------|------------|----------|------------|----------|
|          |    |        | 本文值      | 其它值                  | 本文值        | 其它值      | 本文值        | 其它值      |
| 板 1      | 1  | $M_x$  | /        | /                    | /          | /        | /          | /        |
|          |    | $W$    | 0.00567  | 0.00569              | 0.00283    | 0.00284  | 0.00365    | 0.00366  |
|          | 2  | $M_x$  | 0.05630  | 0.05714              | 0.02815    | 0.02857  | 0.03478    | 0.03523  |
|          |    | $M_y$  | 0.02797  | 0.02878              | 0.01399    | 0.01439  | 0.01201    | 0.01232  |
|          | 3  | $W$    | 0.01123  | 0.0113 <sup>*</sup>  | 0.00562    | 0.00566  | 0.00835    | 0.00842  |
|          |    | $M_x$  | 0.9719   | 0.972 <sup>*</sup>   | 0.04857    | 0.04908  | 0.07176    | 0.07259  |
| 板 2      | 1  | $M_x$  | /        | /                    | /          | /        | /          | /        |
|          |    | $W$    | 0.00793  | 0.00795              | 0.00397    | 0.00401  | 0.00480    | 0.00480  |
|          | 2  | $M_x$  | 0.07986  | 0.080 <sup>*</sup>   | 0.03993    | 0.04081  | 0.04676    | 0.04730  |
|          |    | $M_y$  | 0.03898  | 0.039 <sup>*</sup>   | 0.01949    | 0.01990  | 0.01759    | 0.01777  |
|          | 3  | $W$    | 0.01285  | 0.01286 <sup>*</sup> | 0.00643    | 0.00649  | 0.00917    | 0.00924  |
|          |    | $M_x$  | 0.1117   | 0.112 <sup>*</sup>   | 0.05583    | 0.05685  | 0.07913    | 0.07999  |
| 板 3      | 1  | $M_x$  | -0.06479 | -0.06435             | -0.02430   | -0.02474 | -0.03418   | -0.03536 |
|          |    | $W$    | 0.00189  | 0.00190              | 0.00095    | 0.00095  | 0.00109    | 0.00110  |
|          | 2  | $M_x$  | 0.03135  | 0.03242              | 0.01568    | 0.01621  | 0.01753    | 0.01812  |
|          |    | $M_y$  | 0.01682  | 0.01737              | 0.00841    | 0.00868  | 0.00643    | 0.00660  |
|          | 3  | $W$    | 0.00295  | 0.00298              | 0.00148    | 0.00149  | 0.00238    | 0.00240  |
|          |    | $M_x$  | 0.04424  | 0.04462              | 0.002212   | 0.02231  | 0.03475    | 0.03507  |
| 板 4      | 1  | $M_x$  | -0.07603 | -0.07442             | -0.02967   | -0.02903 | -0.03820   | -0.0390  |
|          |    | $W$    | 0.00225  | 0.00226              | 0.00112    | 0.00112  | 0.00122    | 0.00123  |
|          | 2  | $M_x$  | 0.03702  | 0.03820              | 0.01851    | 0.01903  | 0.01958    | 0.02022  |
|          |    | $M_y$  | 0.01754  | 0.01801              | 0.00877    | 0.00894  | 0.00669    | 0.00683  |
|          | 3  | $W$    | 0.00297  | 0.00300              | 0.00149    | 0.00150  | 0.00239    | 0.00241  |
|          |    | $M_x$  | 0.04505  | 0.04538              | 0.002253   | 0.02267  | 0.03504    | 0.03534  |
| 板 5      | 1  | $M_x$  | -0.08163 | -0.08225             | -0.03467   | -0.03570 | -0.04521   | -0.04726 |
|          |    | $W$    | 0.00311  | 0.00313              | 0.00169    | 0.00170  | 0.00190    | 0.00191  |
|          | 2  | $M_x$  | 0.03930  | 0.04029              | 0.02053    | 0.02101  | 0.02298    | 0.02352  |
|          |    | $M_y$  | 0.02107  | 0.02169              | 0.01112    | 0.01143  | 0.00836    | 0.00856  |
|          | 3  | $W$    | 0.00551  | 0.00556              | 0.00302    | 0.00305  | 0.00425    | 0.00429  |
|          |    | $M_x$  | 0.06094  | 0.06152              | 0.003228   | 0.03258  | 0.04639    | 0.04688  |

| 边界<br>条件 | 计算 | 类<br>别 | 均布荷载    |         | $x$ 方向三角荷载 |          | $y$ 方向三角荷载 |          |
|----------|----|--------|---------|---------|------------|----------|------------|----------|
|          |    |        | 本文值     | 其它值     | 本文值        | 其它值      | 本文值        | 其它值      |
| 板 6      | 1  | $M_x$  | -0.1024 | -0.1013 | -0.04568   | -0.04501 | -0.05408   | -0.05547 |
|          |    | $W$    | 0.00394 | 0.00396 | 0.00215    | 0.00215  | 0.00226    | 0.00227  |
|          | 2  | $M_x$  | 0.04976 | 0.05091 | 0.02624    | 0.02667  | 0.02751    | 0.02813  |
|          |    | $M_y$  | 0.02455 | 0.02502 | 0.01308    | 0.01319  | 0.00987    | 0.0100   |
|          | 3  | $W$    | 0.00579 | 0.00584 | 0.00318    | 0.00320  | 0.00437    | 0.00441  |
|          |    | $M_x$  | 0.06443 | 0.06499 | 0.03421    | 0.03446  | 0.04790    | 0.04839  |

注:表中带“\*”的其它值为文献 1 中的结果,其余均为有限元结果。

2 板边分布荷载作用下的弯曲

当在简支边上作用分布弯矩,或在自由边界上作用分布剪力或分布弯矩时,挠度  $W$  应满足齐次平衡微分方程。式(3)所示的通解  $W_1$  满足要求,即利用式(3)和边界条件可直接求解,现考虑以下几种荷载类型:

图 3 所示的荷载 1 为简支边  $CD$  上作用的分布弯矩(单位长度弯矩为  $M_0$ ),荷载 2、荷载 3、荷载 4 分别为自由边  $BD$  上作用的均布剪力  $q$ ,三角形分布剪力及分布弯矩。在上述荷载作用下求解待定常数的线性方程式左端系数项与板面分布荷载作用下相应的系数相同,而端常数项要由边界荷载确定,如表 4 所示。

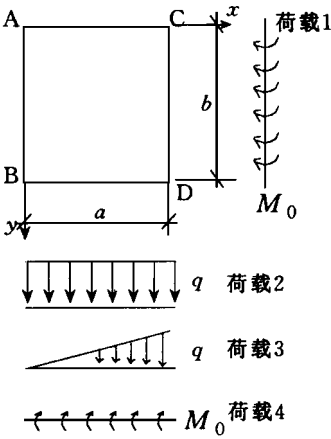


图 3 板边不同分布荷载

算例 2: 图 2 所示正方形板 ( $a=b$ ), 承受板边分布荷载作用, 泊松比  $\mu=0.3$ , 表 5 列出取级数前三项时对应图中 2 点的挠度系数和弯矩系数, 与有限元的结果吻合。

3 边界上作用集中力或集中力偶的弯曲

当自由边作用集中力或集中力偶时,或在简支边作用集中力偶时,挠度  $W$  也应满足齐次微分方程。若将集中力或集中力偶转换成边界上的分布剪力或分布弯矩,即可利用式(3)和边界条件求解。

图 4 所示在简支边  $x=a$  的边界  $y=\xi$  点处作用集中力偶  $M$ , 设  $M$  的分布长度为  $\triangle \xi$  则在  $x=a$  的边界上弯矩  $M_x$  的分布为:

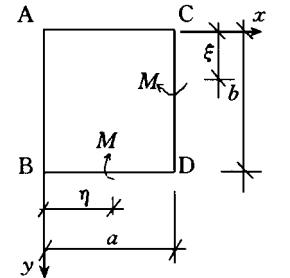


图 4 边界上受集中力(偶)的矩形板示意图

表 4 板边分布荷载作用下方程右端项

| 边界条件 | 方程编号   | 方程右端常数项                   |                    |                     |                      |
|------|--|---------------------------|--------------------|---------------------|----------------------|
|      |  | 荷载 1                      | 荷载 2               | 荷载 3                | 荷载 4                 |
| 板 1  | 式 (17)   | $-\frac{M_0}{D} \alpha_0$ | 0                  | 0                   | 0                    |
|      | 式 (13)   | 0                         | $-\frac{q}{D} d_0$ | $-\frac{q}{Da} d_1$ | 0                    |
|      | 式 (20)   | 0                         | 0                  | 0                   | $-\frac{M_0}{D} d_0$ |
|      | 式 (10), 式 (11), 式 (12)                           | 0                         | 0                  | 0                   | 0                    |
|      | 式 (15), 式 (18)                                   |                           |                    |                     |                      |
| 板 2  | 式 (17)   | $-\frac{M_0}{D} \alpha_0$ | 0                  | 0                   | 0                    |
|      | 式 (13)   | 0                         | $-\frac{q}{D} d_0$ | $-\frac{q}{Da} d_1$ | 0                    |
|      | 式 (20)   | 0                         | 0                  | 0                   | $-\frac{M_0}{D} d_0$ |
|      | 式 (10), 式 (11), 式 (12)                           | 0                         | 0                  | 0                   | 0                    |
|      | 式 (15), 式 (19)                                   |                           |                    |                     |                      |
| 板 3  | 式 (13)   | /                         | $-\frac{q}{D} d_0$ | $-\frac{q}{Da} d_1$ | 0                    |
|      | 式 (20)   | /                         | 0                  | 0                   | $-\frac{M_0}{D} d_0$ |
|      | 式 (10), 式 (11), 式 (12)<br>式 (14), 式 (16), 式 (18) | /                         | 0                  | 0                   | 0                    |
| 板 4  | 式 (13)   | /                         | $-\frac{q}{D} d_0$ | $-\frac{q}{Da} d_1$ | 0                    |
|      | 式 (20)   | /                         | 0                  | 0                   | $-\frac{M_0}{D} d_0$ |
|      | 式 (10), 式 (11), 式 (12)                           | /                         | 0                  | 0                   | 0                    |
|      | 式 (14), 式 (16), 式 (19)                           |                           |                    |                     |                      |
| 板 5  | 式 (17)   | $-\frac{M_0}{D} \alpha_0$ | 0                  | 0                   | 0                    |
|      | 式 (13)   | 0                         | $-\frac{q}{D} d_0$ | $-\frac{q}{Da} d_1$ | 0                    |
|      | 式 (20)   | 0                         | 0                  | 0                   | $-\frac{M_0}{D} d_0$ |
|      | 式 (10), 式 (11), 式 (12)                           | 0                         | 0                  | 0                   | 0                    |
|      | 式 (14), 式 (18)                                   |                           |                    |                     |                      |
| 板 6  | 式 (17)   | $-\frac{M_0}{D} \alpha_0$ | 0                  | 0                   | 0                    |
|      | 式 (13)   | 0                         | $-\frac{q}{D} d_0$ | $-\frac{q}{Da} d_1$ | 0                    |
|      | 式 (20)   | 0                         | 0                  | 0                   | $-\frac{M_0}{D} d_0$ |
|      | 式 (10), 式 (11), 式 (12)                           | 0                         | 0                  | 0                   | 0                    |
|      | 式 (14), 式 (19)                                   |                           |                    |                     |                      |



表 5 板边分布荷载作用下挠度系数和弯矩系数

| 边界条件 | 计算点 | 类别    | 荷载 1   |        | 荷载 2    |         | 荷载 3    |         | 荷载 4    |         |
|------|-----|-------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|      |     |       | 本文值    | 有限元值   | 本文值     | 有限元值    | 本文值     | 有限元值    | 本文值     | 有限元值    |
| 板 1  | 2   | $W$   | 0.0265 | 0.0255 | 0.0086  | 0.0087  | 0.0043  | 0.0043  | -0.0038 | -0.0039 |
|      |     | $M_x$ | 0.1696 | 0.1604 | 0.0688  | 0.0670  | 0.0334  | 0.0335  | 0.0159  | 0.0173  |
|      |     | $M_y$ | 0.1008 | 0.1049 | -0.0334 | -0.0345 | -0.0167 | -0.0173 | 0.1750  | 0.1777  |
| 板 2  | 2   | $W$   | 0.0375 | 0.0364 | 0.0106  | 0.0106  | 0.0053  | 0.0053  | -0.0035 | -0.0035 |
|      |     | $M_x$ | 0.2815 | 0.2719 | 0.0868  | 0.0872  | 0.0434  | 0.0436  | 0.0193  | 0.0208  |
|      |     | $M_y$ | 0.1553 | 0.1578 | -0.0241 | -0.0254 | -0.0120 | -0.0127 | 0.1766  | 0.1793  |
| 板 3  | 2   | $W$   |        |        | 0.0013  | 0.0013  | 0.0007  | 0.0007  | 0.0038  | 0.0038  |
|      |     | $M_x$ | /      | /      | 0.0139  | 0.0146  | 0.0069  | 0.0073  | 0.0807  | 0.0793  |
|      |     | $M_y$ |        |        | -0.0295 | -0.0306 | -0.0148 | -0.0153 | 0.1039  | 0.1106  |
| 板 4  | 2   | $W$   |        |        | 0.0013  | 0.0013  | 0.0007  | 0.0007  | 0.0044  | 0.0043  |
|      |     | $M_x$ | /      | /      | 0.0141  | 0.0149  | 0.0070  | 0.0074  | 0.0894  | 0.0872  |
|      |     | $M_y$ |        |        | -0.0295 | -0.0306 | -0.0148 | -0.0153 | 0.1111  | 0.1115  |
| 板 5  | 2   | $W$   | 0.0176 | 0.0170 | 0.0035  | 0.0035  | 0.0019  | 0.0020  | 0.0020  | 0.0020  |
|      |     | $M_x$ | 0.1091 | 0.1035 | 0.0300  | 0.0305  | 0.0166  | 0.0169  | 0.0625  | 0.0628  |
|      |     | $M_y$ | 0.0816 | 0.0853 | -0.0335 | -0.0348 | -0.0175 | -0.0183 | 0.1434  | 0.1451  |
| 板 6  | 2   | $W$   | 0.0227 | 0.0222 | 0.0038  | 0.0038  | 0.0021  | 0.0022  | 0.0029  | 0.0028  |
|      |     | $M_x$ | 0.1698 | 0.1652 | 0.0341  | 0.0348  | 0.0190  | 0.0193  | 0.0732  | 0.0730  |
|      |     | $M_y$ | 0.1054 | 0.1087 | -0.0321 | -0.0334 | -0.0167 | -0.0175 | 0.1468  | 0.1483  |

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq y \leq \xi - \frac{\Delta \xi}{2} \quad M_x &= 0 \\ \xi - \frac{\Delta \xi}{2} \leq y \leq \xi + \frac{\Delta \xi}{2} \quad M_x &= \frac{M}{\Delta \xi} \\ \xi + \frac{\Delta \xi}{2} \leq y \leq b \quad M_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

设  $M_x = \sum_{n=1,3,5} S_n \sin \frac{n\pi y}{2b}$ , 则

$$S_n = \frac{2}{b} \int_0^b M_x \sin \frac{n\pi y}{2b} dy = \frac{2}{b} \int_{\xi - \frac{\Delta \xi}{2}}^{\xi + \frac{\Delta \xi}{2}} \frac{M}{\Delta \xi} \sin \frac{n\pi y}{2b} dy = \frac{2M}{b} \sin \frac{n\pi \xi}{2b}, \text{ 即}$$
$$M_x = \sum_{n=1,3,5} \frac{2M}{b} \sin \frac{n\pi \xi}{2b} \sin \frac{n\pi y}{2b} \quad (38)$$

由  $x=a$  时,  $\frac{\partial W}{\partial x^2} = -\frac{M_x}{D}$  的边界条件得

$$\begin{aligned} &\beta [E_{nsh} \beta_u + F_{nch} \beta_u + G_n (2ch \beta_u + \beta_{ush} \beta_u) + H_n (2sh \beta_u + \beta_{uch} \beta_u)] \\ &= -\frac{2M}{Db} \sin \frac{n\pi \xi}{2b} \end{aligned} \quad (39)$$

当在自由边  $y=b$  的边界上  $x=\eta$  处作用一集中力偶  $M$  时, 由  $y=b$  时,  $\frac{\partial W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial W}{\partial x^2} = -\frac{M_x}{D}$  的边界条件得:

$$\begin{aligned} & \alpha \left\{ A_m (1 - \mu) \operatorname{sh} \xi + B_m (1 - \mu) \operatorname{ch} \xi + C_m [2 \operatorname{ch} \xi + (1 - \mu) \xi \operatorname{sh} \xi] \right. \\ & \left. + D_m [2 \operatorname{sh} \xi + (1 - \mu) \xi \operatorname{ch} \xi] \right\} \\ & + \sum_{n=1,3,5} \beta \left\{ E_n (\mu - 1) b_1 + F_n (\mu - 1) b_2 + G_n [2 \eta b_2 + (\mu - 1) b_3] \right. \\ & \left. + H_n [2 \eta b_1 + (\mu - 1) b_4] \right\} \sin \frac{n \pi}{2} = - \frac{2M}{Da} \sin \frac{m \pi \eta}{a} \end{aligned} \tag{40}$$

当在自由边  $y=b$  的边界上  $x=\eta$  处作用一向下的集中力  $P$  时, 由  $y=b$  时  $\frac{\partial W}{\partial y} + (2 - \mu) \frac{\partial W}{\partial^2 \eta} = -\frac{V_x}{D}$  的边界条件得:

$$\begin{aligned} & \alpha \left\{ A_m (\mu - 1) \operatorname{ch} \xi + B_m (\mu - 1) \operatorname{sh} \xi + C_m [(\mu - 1) \operatorname{sh} \xi + (\mu - 1) \xi \operatorname{ch} \xi] \right. \\ & \left. + D_m [(\mu + 1) \operatorname{ch} \xi + (\mu - 1) \xi \operatorname{sh} \xi] \right\} \\ & = - \frac{2P}{Da} \sin \frac{m \pi \eta}{a} \end{aligned} \tag{41}$$

式 (39)、式 (40)、式 (41) 左端系数项同式 (17)、式 (20)、式 (13)。可见在边界上作用集中力偶或集中力时求解待定常数的线性方程组左端系数与板面作用分布荷载时相应的系数相同, 而右端常数项可参照式 (39)、式 (40)、式 (41) 确定。

对  $\mu=0.3$  且  $a=b$  的方板, 当  $\xi=\frac{b}{2}$ ,  $y=\frac{a}{2}$  时, 表 6 列出对应图 2 板中点的挠度系数和弯矩系数, 表中  $K$  为级数的取项数。结果与有限元值吻合说明本文方法是可行的。

4 一对边简支矩形板弯曲的简化方法

本文方法的基本思路是:通解  $W_1$  是包含 8 个待定常数的双向单三角级数, 见式 (3) 示。在板面分布荷载作用下特解  $W_2$  应满足一定的边界条件以保证在组成以待定常数为未知量的线性方程中至少有 4 个精确方程。 $W_2$  应满足的边界条件与通解  $W_1$  所采用的级数形式有一定的对应关系。在式 (3) 所示的通解中有级数  $\sum_{m=1,2,3} \sin \frac{m \pi \eta}{a}$ , 在  $x=0$  和  $x=a$  的边界上级数的零阶导数和二阶导数为零值, 这要求  $W_2$  在  $x=0$  和  $x=a$  的边界上应满足  $x$  的零阶导数或二阶导数的边界条件, 且要优先满足低阶导数的边界条件。对图 1 所示的板 1 和板 2, 在  $x=0$  和  $x=a$  均为简支边, 这二个边界条件同时存在, 若特解  $W_2$  在这二个边界上同时满足这二个边界条件时, 在组成以待定常数为未知量的线性方程组中也会形成 4 个精确方程, 满足上述求解要求。 $W_2$  可以满足下列边界条件:

$$\left. \begin{aligned} & x=0 \text{ 和 } x=a \text{ 时, } W_2=0 \\ & x=0 \text{ 和 } x=a \text{ 时, } \frac{\partial W_2}{\partial^2} \end{aligned} \right\} \tag{42}$$

当板面承受均布荷载时, 取

$$W_2 = \frac{q}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^3x) \tag{43}$$

当板面承受图 1 所示  $x$  方向变化的三角形分布荷载时, 取

$$W_2 = \frac{q}{360Da} (3x^5 - 10a^2x^3 + 7a^4x) \tag{44}$$

表 6  板中点挠度系数和弯矩系数

| 边界条件 | 类别             | CD 边中点作用集中力偶 |         | BD 边中点作用集中力偶 |          | BD 边中点作用集中力 |         |
|------|----------------|--------------|---------|--------------|----------|-------------|---------|
|      |                | 本文值<br>K=8   | 有限元值    | 本文值<br>K=7   | 有限元值     | 本文值<br>K=7  | 有限元值    |
| 板 1  | W              | 0.03201      | 0.03197 | −0.00569     | −0.00585 | 0.01363     | 0.01369 |
|      | M <sub>x</sub> | 0.1766       | 0.1787  | 0.0450       | 0.0419   | 0.1096      | 0.1099  |
|      | M <sub>y</sub> | 0.2582       | 0.2563  | 0.2743       | 0.2913   | −0.0550     | −0.0573 |
| 板 2  | W              | 0.04519      | 0.04517 | −0.00518     | −0.00533 | 0.01664     | 0.01669 |
|      | M <sub>x</sub> | 0.3132       | 0.3163  | 0.0504       | 0.0475   | 0.1410      | 0.1416  |
|      | M <sub>y</sub> | 0.3225       | 0.3195  | 0.2768       | 0.2938   | −0.0404     | −0.0430 |
| 板 3  | W              |              |         | 0.00551      | 0.00559  | 0.00270     | 0.00269 |
|      | M <sub>x</sub> |              |         | 0.1347       | 0.1341   | 0.03199     | 0.03212 |
|      | M <sub>y</sub> |              |         | 0.2048       | 0.2187   | −0.0556     | −0.0575 |
| 板 4  | W              |              |         | 0.00630      | 0.00640  | 0.00276     | 0.00274 |
|      | M <sub>x</sub> |              |         | 0.1473       | 0.1473   | 0.0329      | 0.0330  |
|      | M <sub>y</sub> |              |         | 0.2058       | 0.2201   | −0.0555     | −0.0574 |
| 板 5  | W              | 0.02312      | 0.02310 | 0.00270      | 0.00272  | 0.00598     | 0.00599 |
|      | M <sub>x</sub> | 0.1180       | 0.1209  | 0.1094       | 0.1079   | 0.0558      | 0.0560  |
|      | M <sub>y</sub> | 0.2301       | 0.2277  | 0.2413       | 0.2571   | −0.0587     | −0.0608 |
| 板 6  | W              | 0.02945      | 0.02947 | 0.00392      | 0.00397  | 0.00656     | 0.00656 |
|      | M <sub>x</sub> | 0.1951       | 0.1992  | 0.1249       | 0.1239   | 0.0629      | 0.0632  |
|      | M <sub>y</sub> | 0.2581       | 0.2550  | 0.2463       | 0.2620   | −0.0562     | −0.0585 |

当板面承受图 1 所示  $y$  方向变化的三角形分布荷载时, 取

$$W_2 = \frac{qy}{24Db}(x^4 - 2ax^3 + a^3x)$$

( 45)

由此可得以下 4 个精确方程:

$$\left. \begin{aligned} F_n &= 0 \\ E_n \text{sh} \beta a + F_n \text{ch} \beta a + G_n \beta a \text{sh} \beta a + H_n \beta a \text{ch} \beta a &= 0 \\ \beta(F_n + 2G_n) &= 0 \\ \beta[E_n \text{sh} \beta a + F_n \text{ch} \beta a + G_n(2 \text{ch} \beta a + \beta a \text{sh} \beta a) \\ &+ H_n(2 \text{sh} \beta a + \beta a \text{ch} \beta a)] = 0 \end{aligned} \right\}$$

( 46)

由此可解出  $E_n = F_n = G_n = H_n = 0$ , 通解式( 3) 蜕化为

$$W_1 = \sum_{m=1,2,3} (A_m \text{sh} \alpha + B_m \text{ch} \alpha + C_m \alpha \text{sh} \alpha + D_m \alpha \text{ch} \alpha) \sin \alpha$$

( 47)

式中  $\alpha = \frac{m\pi}{a}$ ,  $A_m, B_m, C_m, D_m$  为 4 个待定常数, 其值可由  $y=0$  和  $y=b$  时的边界条件确定, 这就是经典的李维解法。因此可以说李维解法是本文解法的特例, 是本文解法在特殊边界条件下的简化。

李维解法仅能解决板面上作用分布荷载和在  $y=0$  及  $y=b$  的边界上作用分布荷载或集中荷载的情况, 但当在  $x=0$  和  $x=a$  的边界上作用分布弯矩或集中力偶时李维解法便不再适用了, 这是因为在式( 46) 中的右端项出现非零值, 导致  $E_n, F_n, G_n, H_n$  不全为零。而本文解法不受此限。(下转 36 页)

# Operating Ticket Expert System for Large Scale Substation

Zou Jun   Xu Min   Lou Hegong  
(Zhengzhou University of Technology)

**Abstract**   The authors proposed a method of generating the operation order by computer automatically. The softwares are developed by Borland C++ and can be run under Microsoft Windows. The pack can generate, edit, save and print operating-ticket of substation; at the same time, it can carry out the function of dynamic training simulator for substation operator and display the network of substation. Furthermore, a control centre model implemented on the rule-based expert system is presented. The radical algorithm is the method of data-driven, backtracing and depth-first searching.

**Keywords**   expert system; data-driven; training simulator  
(上接 15 页)

## 参 考 文 献

1   S 铁摩辛柯, S 沃诺斯基著. 板壳理论. 科学出版社. 1977

# Rectangular plate Bending with Three Edges Supported and One Edge Free

Xu Qilou   Jiang Rui   Long Yejun  
(Zhengzhou University of Technology)   (Henan Light Industry School)

**Abstract**   In this paper, using a computation pattern, the bending solution of six rectangular plates with three edges supported and one edge free are derived under the uniform load or distributed load on the plate, under the distributed shear or concentric load or distributed or concentric moment at the edge. The results indicate the method has the advantage of rapiadly converging and high precision.

**Keywords**   Bending of elastic plate; rectangular plate