

# 多元复合函数的二阶偏导数公式

黄世强

孙跃俊

( 郑州工业大学数力系) ( 焦作工学院基础部, 454150)

**摘 要** 本文建立了多元复合函数的二阶偏导数公式。

**关键词** 偏导数; 矩阵; 内积

**中图分类号** O 172.1

使用 Jacobi 矩阵能够给出多元复合函数的一阶偏导数公式<sup>[1]</sup>。但是长期以来, 对于多元复合函数的高阶偏导数, 却只有运算法则, 没有计算公式。本文以具有两个中间变元的复合函数为例, 建立了多元复合函数的二阶偏导数公式。从而, 使繁冗且易错的运算可以规范化地进行。

## 1 一阶偏导数的各种表示式

设函数  $z=f(u, v) \in C^2$ , 其中  $u=u(x, y) \in C^2, v=v(x, y) \in C^2$ 。构造函数矩阵 (行向量)<sup>[2]</sup>:

$$A=[f'_u, f'_v]; B_x=[u'_x, v'_x]; B_y=[u'_y, v'_y];$$

则成立一阶偏导数公式

$$\frac{\partial}{\partial x} = f'_{u x} + f'_{v x} = AB_x^T = A \cdot B_x \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = f'_{u y} + f'_{v y} = AB_y^T = A \cdot B_y \tag{2}$$

其中  $A^T$  是  $A$  的转置,  $A \cdot B_x$  是  $A$  与  $B_x$  的内积。

定义 称  $F \overset{\Delta}{=} \begin{pmatrix} f''_{uu} & f''_{uv} \\ f''_{uv} & f''_{vv} \end{pmatrix}$  为  $A$  关于  $u、v$  的导数矩阵。

## 2 定理

定理一 矩阵  $A$  关于  $x$  (或  $y$ ) 的偏导数等于矩阵  $B_x$  (或  $B_y$ ) 左乘  $A$  关于  $u、v$  的导数矩阵  $F$ 。

证明 
$$\frac{\partial}{\partial x} = [\frac{\partial}{\partial x} f'_u, \frac{\partial}{\partial x} f'_v] = [u'_x, v'_x] \begin{pmatrix} f''_{uu} & f''_{uv} \\ f''_{uv} & f''_{vv} \end{pmatrix} = B_x F \tag{3}$$

同理可得 
$$\frac{\partial}{\partial y} = B_y F \tag{4}$$

定理二 设矩阵  $G=[\Phi(x, y) \cdot \Psi(x, y)] \in C'$ ; 则

$$\frac{\partial}{\partial x}(AG^T) = B_x F G^T + A \frac{\partial}{\partial x} G^T \tag{5}$$

