第 18 卷　第 4 期
1997 年　12 月
郑州工业大学学报
Journal of Zhengzhou University of Technology
Vol.18　No.4.
Dec. 1997

模具用金属颗粒/树脂复合材料弹性模量的随机边界元计算

张　恒　　张　力　　王相乾

(洛阳工学院复合材料研究所，471039)

摘　要　提出一种把弹性静力学多区域组合边界元和数理统计理论相结合的方法，用于计算模具用金属颗料/树脂复合材料的宏观弹性模量。实测结果和计算结果吻合较好。

关键词　复合材料；弹性模量；模具

中图分类号　TB333

0　引言

用金属铝或铁颗粒增强环氧树脂或酚醛树脂以代替金属材料来制造吹塑、注塑、压制模塑和传递模塑等塑料模具可以大大地降低模具成本，缩短模具制造周期并减轻模具重量[1]。相对于金属材料，颗粒增强树脂复合材料在模具工作温度下的弹性模量要低得多，因而在工作压力下可能产生较大的变形。这将直接影响塑件的产品质量。因此，较准确地预测各种混合比的颗粒复合材料在不同工作温度下的弹性模量，对于把颗粒增强树脂复合材料用于塑料模具制造有重要的意义。

关于颗料复合材料弹性模量的细观力学计算，已有不少的研究者提出各种模型，像并联模型、串联模型、分散模型、Hirsch 模型、Counto 模型以及 Hashin 模型[2]等等。但这些模型都未能涉及颗粒在基体的三维空间中随机分布的几何特征，因而其计算结果和实际情况有较大的偏差，本文提出一种把弹性静力学多区域组合边界单元法和数理统计理论相结合的方法，用于计算颗粒增强树脂复合材料的高温弹性模量。针对球状铝颗料增强环氧树脂制造的注塑模具，用实验方法测定了模具材料的高温弹性模量。实验结果和数值计算结果吻合较好，证实了方法的可行性。

1　多区域组合边界元法及其凝聚技术

无体力弹性力学边值问题的边界积分方程可写成[3]

$$[C_i]\{U_i\} - \int_{\Gamma}[P^*]\{U\}d\Gamma = \int_{\Gamma}[U^*]\{p\}d\Gamma \tag{1}$$

式中 $\{U\}$ 和 $\{p\}$ 分别为区域边界 Γ 上的位移分量和面力分量列阵，$[U^*]$ 和 $[P^*]$ 分别为 Kelvin 基本解的位移和面力分量组成的 3×3 阶方阵。把区域边界划分成有限个单元，把

收稿日期：1997－03－23
第一作者　男　1946 年 11 月生　学士学位　教授

(1) 式在边界上离散，然后依次取各边界节点为基本解中的源点，可以得到问题的系统矩阵方程

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} \tag{2}$$

式中 {U} 和 {P} 分别为节点位移和节点面力分量组成的列阵，[H] 和 [G] 为相应的系数矩阵。

设某三维区域 Ω 由一连续相(弹性基体)和 M 个弹性异相包含物(颗粒)组成(见图 1)。把 Ω 划分为 M＋1 个子域，基体编号为 0，各包含物依次为 1，2，…，M。把所有子区域的边界离散。对于每个子区域，可以写出一个形如(2)的方程，依次排列如下：

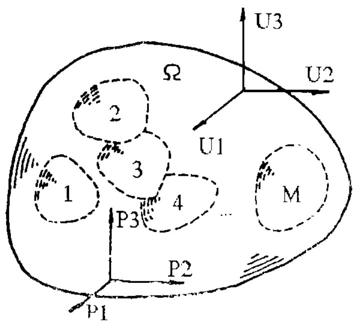

图 1　带有 M 个包含物的区域Ω

$$
\begin{aligned}
&[H_0^0 H_0^0 H_1^0 H_2^0 \cdots H_M^0][U_0^0 U_0^0 U_0^1 U_0^2 \cdots H_0^M]^T = \\
&[G_0^0 G_0^0 G_1^0 G_2^0 \cdots G_M^0][P_0^0 P_0^0 P_0^1 P_0^2 \cdots P_0^M]^T = \\
&\qquad [H_0^1]\{U_1^0\} = [G_0^1]\{[P_1^0\} \\
&\qquad [H_0^2]\{U_2^0\} = [G_0^2]\{[P_2^0\} \\
&\qquad \cdots \\
&[H_0^M]\{U_M^0\} = [G_0^M]\{[P_M^0\}
\end{aligned} \tag{3}
$$

式中 H_K^1 和 G_K^1(K，$1=0\sim M$) 分别表示第 K 个子域的系数矩阵 [H] 和 [G] 中和第 1 个子域邻接的公共界面相对应的子矩阵；H_0^0 和 G_0^0 分别表示 0 号子域的系数矩阵 [H] 和 [G] 中对应外围边界上已知节点位移和节点面力的子矩阵，而 H_0^0 和 G_0^0 则分别表示和未知的节点位移和面力相对应的子矩阵；U_K^1 和 P_K^1(K，$1=0\sim M$) 分别表示第 K 个子区域的系统矩阵方程中和第 1 个子区域邻接的公共界面上的节点位移和节点面力子矩阵。

在所有子域的公共界面上，有

$$
\left.\begin{aligned}
U_K^1 &= U_1^K \qquad (K, 1 = 0 \sim M) \\
P_K^1 &= P_1^K \qquad (K, 1 = 0 \sim M)
\end{aligned}\right] \tag{4}
$$

代入(3)式，得到问题的总体系统矩阵方程

$$
\left[\begin{array}{cc|cccccc}
G_o^o & H_o^0 & H_1^0 & -G_1^0 & H_2^0 & -G_2^0 & \cdots H_M^0 & -G_M^0 \\
\hline
0 & 0 & H_0^1 & G_0^1 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & H_0^2 & G_0^2 & \cdots 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots H_0^2 & G_0^M
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
P_0^0 \\ \\ U_0^0 \\ U_0^1 \\ P_0^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_0^M \\ P_0^M
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
\underline{H_0^0 U_0^0 + G_0^0 P_0^0} \\ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0
\end{array}\right] \tag{5}
$$

上式可简写成

$$[A]\{X\} = \{F\} \tag{6}$$

求解方程(6)，即可得到所有边界上的节点位移和节点面力。

实际上，我们只对 0 号子域外围边界上的节点位移 U_0^0 感兴趣。按(5)式虚线所示划分部分矩阵，则(6)式中的 [A] 阵可写成

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} A_{12} \\ A_{21} A_{22} \end{bmatrix} \tag{7}$$

式中 $A_{11}=[G_0^0 H_0^0]$。设

$$[B] = [A]^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} B_{12} \\ B_{21} B_{22} \end{bmatrix} \tag{8}$$

式中 $B_{11}B_{22}$ 的阶次与 $A_{11}A_{22}$ 相同。显然，要求 U_0^0 只需计算出式(8)中的子矩阵 $B_{11}B_{12}$ 即可。利用 A_{21} 零矩阵，可导出

$$B_{11} = A_{11}^{-1} + WR^{-1}P \tag{9}$$

$B_{12} = -WR^{-1}$

式中

$$\begin{aligned} W &= A_{11}^{-1}A_{22} \\ P &= A_{21}A_{11}^{-1} \\ R &= A_{22} - PA_{12} \end{aligned} \tag{10}$$

一般情况下，利用式(9)和(10)求解 U_0^0 比直接求解方程(6)可以节省很多计算时间。

2　颗粒复合材料弹性模量算例

设想由 100/200 目球状铝颗粒增强环氧树脂材料中截取一个立方体代表体积单元。单元内含有 3 具球状铝基包含物，铝球体积和环氧树脂体积之比等于颗粒复合材料中铝粉和环氧树脂的体积混合比。设代表性体积单元在顶面受均布载荷 Q 作用，在四个侧面受到位移约束(见图 2)。金属铝弹性模量随温度的变化规律可采用文献[4]，由实验得到的经验公式

$$E_f = 6934.50 + 4.38047\times10^{-2}T^2 - 5.515703\times10^{-4}T^3 + 8.21482\times10^{-7}T^4 \tag{11}$$

双酚 A 型环氧树脂在使用 MPD 固化剂时得到的固化物热变型温度为 155℃，远高于模具的最高工作温度(90℃)。由文献[5]，取其弹性模量为 Em＝3200MPa，并把固化物近拟地看成线弹性体。

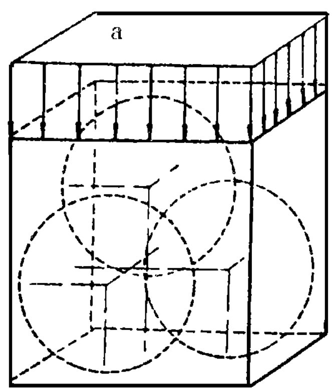

图 2　典型单元

把代表体积单元划分为 4 个子域，并把所有的边界离散化。为缩短计算时间，采用三角形常数单元。共划分 144 个单元(见图 3)采用"2"中所给出的方法，可求得代表性体积单元顶面上的平均位移。根据所加载荷和单元的尺寸，即可计算出材料的宏观弹性模理 E。

在给定混合体积比的条件下，计算结果随代表性体积单元中铝球的相对位置而变化，是一个随机变量。用计算机随机地给出铝球在代表性体积单元中的相对位置 50 次，并自动划分单元网格，重复上述计算过程，我们得到材料弹性模量 E 的 50 个计算值。整理计算结果，做出直方图并描出计算频率曲线(图 4)。用韦布尔频率函数[6]

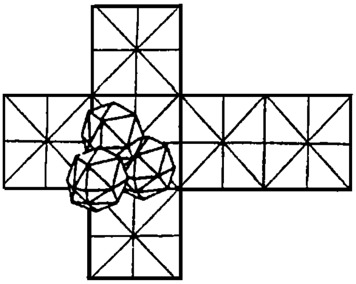

图 3　边界元网格

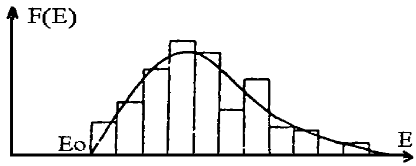

图 4　威布尔分布函数

$$F(E) = \frac{b}{E_a - E_o}\left[\frac{E - E_o}{E_a - E_\sigma}\right]^{b-1} exp\left\{-\left[\frac{E - E_o}{E_a - E_\sigma}\right]^{b}\right\} \qquad (12)$$

拟合计算频率曲线,可确定函数中的待定参数 E_o、E_a 和 b,则韦布尔变量的数字期望可表达为[6]

$$E_c = \int_{E_o}^{\infty} \frac{Eb}{E_a - E_o}\left[\frac{E - E_o}{E_a - E_\sigma}\right]^{b-1} exp\left\{-\left[\frac{E - E_o}{E_a - E_\sigma}\right]^{b}\right\} dE \qquad (13)$$

利用变量代换,可求得上式中的积分,则

$$E_c = E_o + (E_a - E_o) r(1 + b) \qquad (14)$$

式中 r 为 r 函数。由(14)式计算出的结果即可做为铝粉增强环氧树脂复合材料在模具工作温度下的弹性模量。韦布尔变量的方差为

$$\sigma^2 = (E_a - E_0)^2 \left\{ r(1 + \frac{2}{b}) - r^2(1 + \frac{1}{b}) \right\} \qquad (15)$$

σ^2 可做为计算结果分散性的度量,一般说来,在代表性体积单元中取较多的球状铝颗粒,可得到较小的方差值。

3　实验

按照 IS0604 热固性塑料实验标准[5],采用与算例相同的体积比制成 12 个园柱形压缩试件。利用自制温控电热圈产生注塑工况条件下模具温度。由高温电阻丝片量测应变,压力传感器量测载荷,X－Y 函数记录仪描出载荷变形曲线,则材料的弹性模量可按下式计算

$$E = \frac{\triangle \sigma}{\triangle \varepsilon} \qquad (16)$$

式中$\triangle\sigma$为应力增量,$\triangle\varepsilon$为应变增量。

对于 100/200 目铝粉以 50%体积比与环氧树脂混合,固化所得到的颗料复合材料,取注射尼龙 1010 时的模具温度 T＝80℃[7]。由本文的数值计算方法预测其弹性模量为 E^c＝10600MPa。

4　结论和讨论

本文提出的颗粒复合材料弹性模量的数值计算方法利有了边界元法数据输入简单、便

入实现自动划分网格、计算时间短等优点，可以考虑颗料复合材料细观，结构的三维随机分布特征。对于球状铝颗粒增强环氧树脂复合材料，计算结果和实验结果较符合，说明该方法是可行的。现有的计算偏差可能来自两个方面：重复计算的次数太少及所取工作温度太高以致环氧树脂基体不再保持线弹性。前者可通过方差值来检查，一般重复次数应大于 50。如果在代表性体积单元中取较多的包含物，则可减少重复计算的次数。第二方面的偏差需考虑聚合物基体的粘弹性来解决，这有待于进一步的研究。

参　考　文　献

1　申开智，叶淑静等. 塑料成型模具：轻工业出版社. 1985

2　Pobert N. Hand Book of Composite Materials. Prentice－Hall. Inc. New Jersey, 1993, P296－308

3　张恒. 边界单元法工程应用入门：科学出版社. 1992

4　杨涤心. 铝硅类铸造合金热疲劳机理的研究. 洛阳工学院硕士学位论文. 1988

5　北京玻璃钢研究所译. 植树益次主编. 纤维增强塑料设计手册：中国建筑工业出版社. 1986. P35, P161

6　高镇同. 疲劳应用统计学：国防工业出版社. 1986. P82－90

7　机械工业部仪器仪表工业局. 塑料压注成型加工：机械工业出版社. 1985. P236－237

Boundary Element Calculation of the Macro Elastic Modulus of Metal Grain/Polymer Composite

Zhang Heng　Zhang Li　Wang Xiangqian

(*Luoyang Institute of Technology*)

Abstract　A method combining the boundary element technique used in elasto-static problems of multiple regions and statistics is proposed in this paper for the calculation of the macro elastic modulus of metal grain/polymer composite. The computed result is found in good coincidence with the tested result.

Keywords　Composite Materials; elastic modulus; mold