

一边简支一角点或二角点支承的 矩形板弯曲统一求解方法^{*}

许琪楼 姜 锐 唐国明

(郑州工业大学土建系)

摘 要 本文的统一解法可以解决一边简支一角点或二角点支承的矩形板在任意荷载作用下的弯曲。这种方法求解思路清晰,收敛速度快,计算精度高。

关键词 弹性薄板弯曲;矩形板;统一解法

中图分类号 TU375.2

图 1 所示边长为 a, b 的矩形板, $x=0$ 为简支边, B 角点支承或 $B、C$ 二角点支承。本文的求解方法可以解决这二种矩形板在任意荷载作用下的弯曲。

1 一边简支一角点支承的矩形板

1.1 板面荷载作用

板面法向荷载作用下,挠度 W 应满足下列平衡微分方程:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \tag{1}$$

式中 D 为板的抗弯刚度, $D = \frac{Et^3}{12(1-\mu)}$, E, μ 分别为板的弹性模量及泊松比, t 为板厚。

W 还应满足自由角点 C 处的反力条件:

$$R_C = -2(1-\mu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \Big|_{x=a, y=b} = 0 \tag{2}$$

设: $W = W_1 + W_2$ (3)

W_1 和 W_2 分别为方程(1)的通解和特解。 W_1 主要与板的边界条件有关。为表示板的双向弯曲变形和对应板的八个边界条件,取 W_1 为包含八个待定常数的双向单三角级数:

$$\begin{aligned} W_1 = & \sum_{m=1,3,5} (A_m \cosh \alpha y + B_m \sinh \alpha y + C_m \alpha y \cosh \alpha y + D_m \alpha y \sinh \alpha y) \sin \alpha x \\ & + \sum_{n=1,3,5} (E_n \cosh \beta x + F_n \sinh \beta x + G_n \beta x \cosh \beta x + H_n \beta x \sinh \beta x) \sin \beta y + R_1 x \end{aligned} \tag{4}$$

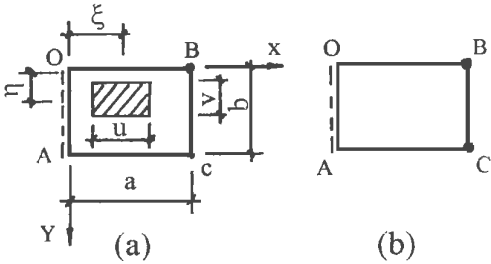


图 1 矩形板示意图

^{*} 河南省自然科学基金资助项目

收稿日期:1997-08-20

第一作者 男 1944 年 4 月生 硕士 教授

式中 $\alpha = \frac{m\pi}{2a}$, $\beta = \frac{n\pi}{2b}$, $A_m, B_m, C_m, D_m, E_n, F_n, G_n, H_n$, 为八个待定常数, 级数

$\sum_{m=1,3,5} \sin \frac{m\pi x}{2a}$ 在 $x=0$ 时为零值, $x=a$ 时不为零, 符合 $x=0$ 为支承边, $x=a$ 为自由边的

变形特点, 级数 $\sum_{n=1,3,5} \sin \frac{n\pi y}{2b}$ 也符合 $y=b$ 边界上挠度大, $y=0$ 边界上挠度小的变形特点。

R_1 可由 B 角点的挠度条件确定。设 \triangle_B 为 B 角点的支座沉降值, 有

$$R_1 = -\frac{1}{a} \sum_{m=1,3,5} \sin \frac{m\pi}{2} + \frac{\triangle_B}{a} \quad (5)$$

级数 $\sum_{m=1,3,5} \sin \frac{m\pi x}{2a}$ 和级数 $\sum_{n=1,3,5} \sin \frac{n\pi y}{2b}$ 分别在 $[0, a]$ 和 $[0, b]$ 区间上具有下列正交性、当 i, j 为任意正奇数时, 有

$$\int_0^a \sin \frac{i\pi x}{2a} \cdot \sin \frac{j\pi x}{2a} dx = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \frac{a}{2} & (i = j) \end{cases} \quad (6)$$

$$\int_0^b \sin \frac{i\pi y}{2b} \cdot \sin \frac{j\pi y}{2b} dy = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \frac{b}{2} & (i = j) \end{cases} \quad (7)$$

特解 W_2 主要与荷载有关, 满足平衡微分方程的特解有很多形式, 但仅以下二种形式适用。

1.1.1 W_2 采用双重三角级数

W_2 采用双重三角级数时, 首先要将 $q(x, y)$ 展成双重三角级数, 级数形式必须与 W_1 中的级数相同, 设

$$q(x, y) = \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,3,5} S_{mn} \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b} \quad (8)$$

其中

$$S_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b} dx dy \quad (9)$$

设

$$W_2 = \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,3,5} R_{mn} \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b} \quad (10)$$

$$R_{mn} = \frac{S_{mn}}{\pi^4 D \left[\left(\frac{m}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n}{2b} \right)^2 \right]^2} \quad (11)$$

当 $q(x, y) = q$ 时,

$$W_2 = \frac{16q}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,3,5} \frac{1}{mn \left[\left(\frac{m}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n}{2b} \right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b} \quad (12)$$

当 $q(x, y) = \frac{qx}{a}$ 时,

$$W_2 = \frac{32q}{\pi^7 D} \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,3,5} \frac{(-1)^{\frac{m+3}{2}}}{m^2 n \left[\left(\frac{m}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n}{2b} \right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b} \quad (13)$$

当 $q(x, y) = \frac{qy}{b}$ 时,

$$W_2 = \frac{32q}{\pi^7 D_m} \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,3,5} \frac{(-1)^{\frac{n+3}{2}}}{mn^2 \left[\left(\frac{m}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n}{2b} \right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b} \quad (14)$$

在图 1(a)所示阴影区作用均布荷载 q 时,

$$W_2 = \frac{64q}{\pi^6 D_m} \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,3,5} \frac{\sin \frac{m\pi \xi}{2a} \sin \frac{m\pi \eta}{4a} \sin \frac{n\pi \eta}{2b} \sin \frac{n\pi \eta}{4b}}{mn^2 \left[\left(\frac{m}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n}{2b} \right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b} \quad (15)$$

在 $x = \xi, y = \eta$ 点上作用集中荷载 P 时,

$$W_2 = \frac{4P}{ab\pi^4 D_m} \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,3,5} \frac{\sin \frac{m\pi \xi}{2a} \sin \frac{n\pi \eta}{2b}}{\left[\left(\frac{m}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n}{2b} \right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b} \quad (16)$$

W_2 满足式(2)所示的自由角点条件,利用边界条件可得求解待定常数的线性方程组,见表 1。

表 1 边界条件对应的方程

边界条件	方程号	方程左端系数项	右端常数项
$x=0$ 时 $W=0$	17	F_n	0
$x=a$ 时 $V_x=0$	18	$\beta^3 \{ E_n(\mu-1) \text{ch} \beta a + F_n(\mu-1) \text{sh} \beta a + G_n[(\mu+1) \text{sh} \beta a + (\mu-1) \beta \text{ash} \beta a] + H_n[(\mu+1) \text{ch} \beta a + (\mu-1) \beta \text{ash} \beta a] \}$	0
$y=0$ 时 $M_y=0$	19	$\alpha^2 [B_m(1-\mu) + 2C_m]$	0
$y=b$ 时 $V_y=0$	20	$\alpha^3 \{ A_m(\mu-1) \text{ch} \alpha b + B_m(\mu-1) \text{sh} \alpha b + C_m[(\mu+1) \text{sh} \alpha b + (\mu-1) \alpha b \text{ch} \alpha b] + D_m[(\mu+1) \text{ch} \alpha b + (\mu-1) \alpha b \text{sh} \alpha b] \}$	0
$x=0$ 时 $M_x=0$	21	$\beta^2 (F_n + 2G_n)$	0
$x=a$ 时 $M_x=0$	22	$\sum_m \alpha^2 \{ A_m(\mu-1) a_1 + B_m(\mu-1) a_2 + C_m[2\mu a_n^2 + (\mu-1) a_3] + D_m[2\mu a_1 + (\mu-1) a_4] \} \sin \frac{m\pi}{2} + \beta^2 \{ E_n(1-\mu) \text{sh} \beta a + F_n(1-\mu) \text{ch} \beta a + G_n[2 \text{ch} \beta a + (1-\mu) \beta \text{ash} \beta a] + H_n[2 \text{sh} \beta a + (1-\mu) \beta \text{ach} \beta a] \}$	$\sum_m \left[\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \mu \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right] \cdot R_{mn} \sin \frac{m\pi}{2}$
$y=0$ 时 $V_y=0$	23	$\alpha^3 [A_m(\mu-1) + D_m(\mu+1)] + \sum_n \beta^3 \{ E_n(1-\mu) b_1 + F_n(1-\mu) b_2 + G_n[2(2-\mu) b_2 + (1-\mu) b_3] + H_n[2(2-\mu) b_1 + (1-\mu) b_4] \}$	$\sum_n \left[\left(\frac{n\pi}{2b} \right)^3 + (2-\mu) \frac{n\pi}{2b} \right] \left(\frac{m\pi}{2a} \right)$

$$y=b \text{ 时 } M_y=0 \quad \sum_n \left[\left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 + (1-\mu) \alpha b \operatorname{sh} \alpha b + B_m (1-\mu) \operatorname{ch} \alpha b + C_m [2 \operatorname{ch} \alpha b + (1-\mu) \alpha b \operatorname{sh} \alpha b] + D_m [2 \operatorname{sh} \alpha b + (1-\mu) \alpha b \operatorname{ch} \alpha b] \right] \cdot R_{mn} \sin \frac{n\pi}{2}$$
$$+ \sum_n \beta^2 \{ E_n (\mu-1) b_1 + F_n (\mu-1) b_2 + G_n [2 \mu b_2 + (\mu-1) b_3] + H_n [2 \mu b_1 + (\mu-1) b_4] \} \sin \frac{n\pi}{2}$$

表中 a_1, a_2, a_3, a_4 分别为 $\operatorname{sh} \alpha y, \operatorname{ch} \alpha y, \alpha y \operatorname{sh} \alpha y, \alpha y \operatorname{ch} \alpha y$ 在 $[0, b]$ 区间上对级数 $\sum_n \sin \alpha x$ 的展开系数, b_1, b_2, b_3, b_4 分别为 $\operatorname{sh} \beta x, \operatorname{ch} \beta x, \beta x \operatorname{sh} \beta x, \beta x \operatorname{ch} \beta x$ 在 $[0, a]$ 区间上对级数 $\sum_m \sin \beta x$ 的展开系数, 其值为:

$$a_1 = \frac{2 \alpha \operatorname{ch} \alpha b \sin \frac{n\pi}{2}}{b (\alpha^2 + \beta^2)}$$

(25)

$$a_2 = \frac{2 (\beta + \alpha \operatorname{sh} \alpha b \sin \frac{n\pi}{2})}{b (\alpha^2 + \beta^2)}$$

(26)

$$a_3 = \frac{2 \alpha^2 \operatorname{ch} \alpha b \sin \frac{n\pi}{2}}{(\alpha^2 + \beta^2)} + \frac{2 \alpha (\beta^2 - \alpha^2) \operatorname{sh} \alpha b \sin \frac{n\pi}{2} - 4 \alpha^2 \beta}{b (\alpha^2 + \beta^2)^2}$$

(27)

$$a_4 = \frac{2 \alpha^2 \operatorname{sh} \alpha b \sin \frac{n\pi}{2}}{(\alpha^2 + \beta^2)} + \frac{2 \alpha (\beta^2 - \alpha^2) \operatorname{ch} \alpha b \sin \frac{n\pi}{2}}{b (\alpha^2 + \beta^2)^2}$$

(28)

$$b_1 = \frac{2 \beta \operatorname{ch} \beta a \sin \frac{m\pi}{2}}{\alpha (\alpha^2 + \beta^2)}$$

(29)

$$b_2 = \frac{2 (\alpha + \beta \operatorname{sh} \beta a \sin \frac{m\pi}{2})}{\alpha (\alpha^2 + \beta^2)}$$

(30)

$$b_3 = \frac{2 \beta^2 \operatorname{ch} \beta a \sin \frac{m\pi}{2}}{(\alpha^2 + \beta^2)} + \frac{2 \beta (\alpha^2 - \beta^2) \operatorname{sh} \beta a \sin \frac{m\pi}{2} - 4 \alpha \beta^2}{\alpha (\alpha^2 + \beta^2)^2}$$

(31)

$$b_4 = \frac{2 \beta^2 \operatorname{sh} \beta a \sin \frac{m\pi}{2}}{(\alpha^2 + \beta^2)} + \frac{2 \beta (\alpha^2 - \beta^2) \operatorname{ch} \beta a \sin \frac{m\pi}{2}}{\alpha (\alpha^2 + \beta^2)^2}$$

(32)

式(17)~式(21)左端系数项不包含任一个非三角函数的展开系数, 右端项为零值, 这类方程称为精确方程。产生精确方程的原因是 W_1 和 W_2 采用了相同的级数形式, 级数 $\sum_{m=1,3,5} \sin \frac{m\pi x}{2a}$ 在 $x=0$ 的边界上零阶导数或二阶导数值为零, 在 $x=a$ 的边界上一阶导数或三阶导数值为零; 级数 $\sum_{n=1,3,5} \sin \frac{n\pi y}{2b}$ 也有类似的特点。这导致在 $x=a, y=0, y=b$ 边界上各产生一个精确方程, 在 $x=0$ 的边界上产生二个精确方程。如果 W_2 或 $q(x, y)$ 展开式中的级数与 W_1 中的级数不同, 这个特解一定不适用, 同时在每个边界上也不会至少产生一个精确方程。因此可得: 在每个边界上至少产生一个精确方程是确保数值收敛和计算精度的必要条件, 是判断特解适用性的标准。

算例 1. 正方形板, $\mu=0.3$ 。表 2 列出四种荷载作用下板中点(1 点)和自由角点(C 点)

的挠度系数和弯矩系数以及支承角点 B 的支反力系数,并与有限元值或理论反力值进行比较。表中荷载 3 为以 $x=\frac{a}{2},y=\frac{b}{2}$ 为中心, $u=\frac{a}{2},v=\frac{b}{2}$ 范围内作用均布荷载 q 的情况,荷载 4 为在板的中心作用集中荷载的情况,计算时取级数前三项。

表 2 计算结果($\triangle_B=0$)

计算点	类别	$q(x,y)=q$		$q(x,y)=\frac{qx}{a}$		荷载 3		荷载 4	
		本文值	有限元值	本文值	有限元值	本文值	有限元值	本文值	有限元值
1	W	0.0632	0.0637	0.0401	0.0403	0.0177	0.0179	0.0745	0.0757
	M_x	0.1196	0.1189	0.0593	0.0586	0.0514	0.0518		
	M_y	0.0625	0.0634	0.0379	0.0384	0.0339	0.0348		
C	W	0.1786	0.1808	0.1190	0.1201	0.0446	0.0455	0.1786	0.1820
B	反力	-0.4938	-.0.5 *	-0.3291	-0.3333 *	-0.1239	-0.1250 *	-0.4875	-0.5 *

注:反力向上为负值,有 * 者为理论反力值
表中反力值是由挠度在二个方向的变化率进行计算的。结果可见双重三角级数特解可以解决板面作用任意荷载时的弯曲。但在集中荷载作用下荷载作用点处的弯矩不收敛。

1.1.2 W_2 采用 x,y 的多项式

特解 W_2 也可以采 x,y 多项式形式,除满足式(1)和式(2)条件外,还应与双重三角级数特解满足相同的条件,即在每一条边界上至少产生一个精确方程。

当 $q(x,y)=q$ 时,取

$$W_2=\frac{q\mu}{4D(2\mu-1)}[(x^2-2ax)(y^2-2by)-\frac{1}{6\mu}(x^4-4ax^3+3a^3x)]$$

(33)

当 $q(x,y)=\frac{qx}{a}$ 时,取

$$W_2=\frac{\mu(\mu-2)q}{24Da(\mu-1)^2}[(x^3-3a^2x)(y^2-2by)-\frac{1}{2(2-\mu)}(y^4-4by^3+8b^3y)-\frac{1}{10\mu}(x^5-10a^2x^3+9a^4x)]$$

(34)

当 $q(x,y)=\frac{qy}{b}$ 时,取

$$W_2=\frac{q(2-\mu)}{12(3-2\mu)Db}\{(y^3(x^2-2ax)-\frac{y}{2(2-\mu)}[x^4-4ax^3+6b^2(2-\mu)x^2+(8a^3-12ab^2(2-\mu)x)])\}$$

(35)

由于 W_2 满足 $x=0$ 时, $W_2=0$, $y=0$ 时相应弯矩为零, $x=a$ 和 $y=b$ 时相应的剪力为零, 因此精确方程式(17)~式(20)保持不变。其它边界条件对应的方程左端系数项不变, 右端常数项见表 3 示。

表 3 其它边界条件对应方程右端项

方程号	$q(x, y)=q$	$q(x, y)=\frac{qx}{a}$	$q(x, y)=\frac{qy}{b}$
21	$-2A_1(C_2-2bC_1)$	0	$-2A_3(C_3-3b^2C_1)$
22	$-2A_1(C_2-2bC_1$ $-a^2(\mu-\frac{1}{\mu})C_0]$	$-A_2\left\{6a(1-\frac{\mu}{2-\mu})\cdot[C_2$ $-2bC_1]-4a^3(\mu-\frac{1}{\mu})C_0\right\}$	$-A_3[2C_3+6a^2\cdot$ $(\frac{\mu-1}{2-\mu})C_1-6b^2C_1]$
23	$4A_1b(2-\mu)d_0$	$12A_2b(2-\mu-\frac{1}{2-\mu})d_1$	$6A_3b^2(2-\mu)d_0$
24	$2A_1\mu b^2d_0$	$6A_2b^2(\mu-\frac{1}{2-\mu})d_1$	$-A_3[12b(d_2-2ad_1)$ $\cdot\frac{1-\mu}{2-\mu}-4\mu b^3d_0]$

表中 $A_1=\frac{q\mu}{4D(2\mu-1)}$, $A_2=\frac{\mu(\mu-2)q}{24Da(\mu-1)^2}$, $A_3=\frac{q(2-\mu)}{12Db(3-2\mu)}$ 。 c_3, c_2, c_1, c_0 分别为 y^3, y^2, y^1, y^0 在 $[0, b]$ 区间上对级数 $\sum_n \sin \beta y$ 的展开系数, d_2, d_1, d_0 分别为 x^2, x, x^0 在 $[0, a]$ 区间上对级数 $\sum_m \sin \alpha x$ 的展开系数, 其值为:

$$c_3=\frac{6b}{\beta^2}\sin\frac{n\pi}{2}\left[1-\frac{8}{(n\pi)^2}\right]$$

(36)

$$c_2=\frac{4}{\beta^2}(\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{n\pi}]$$

(37)

$$c_1=\frac{2}{\beta^2b}\sin\frac{n\pi}{2}$$

(38)

$$c_0=\frac{2}{\beta b}$$

(39)

$$d_2=\frac{4}{\alpha^2}(\sin\frac{m\pi}{2}-\frac{2}{m\pi})$$

(40)

$$d_1=\frac{2}{\alpha^2a}\sin\frac{m\pi}{2}$$

(41)

$$d_0=\frac{2}{\alpha a}$$

(42)

取级数前三项计算, 结果与表 2 所示值相同。但多项式特解无法计算板面作用局部分布荷载或集中荷载的情况, 因为无法找到一个满足平衡微分方程、自由角点条件及前述边界条件的多项式。

1.2 板边荷载作用

当在简支边或自由边上作用分布弯矩、局部分布弯矩或集中弯矩时, 或在自由边上作用分布剪力、局部分布剪力或集中力时, 挠度 W 应满足式(1)对应的齐次微分方程及式(2)所示的自由角点条件。这时可利用通解 W_1 和边界条件直接求解。设在自由边 $x=a$ 边界上

作用向下的均布剪力 q , 则求解待定常数的线性方程左端系数项保持不变, 除与该边界条件对应的式(18)外, 其余方程的右端项均为零值。式(18)的右端项见表 4 示。

表 4 自由边 $x=a$ 边界上作用荷载时方程右端项

方程号	全长作用向下均布剪力 q	$y=y_0$ 为中心, 长度为 v 的范围内作用向下局部均布剪力 q	$y=y_0$ 处作用向下集中力 P
式(18)	$-\frac{q}{D}c_0$	$-\frac{8q}{n\pi D}\sin\frac{n\pi y_0}{2b}\sin\frac{n\pi v}{4b}$	$-\frac{2P}{Db}\sin\frac{n\pi y_0}{2b}$

当在自由边 $x=a$ 的边界上, $y=y_0$ 为中心, 长度为 v 的范围内作用向下的均布剪力 q 时, 要将其转换为全长等效的分布剪力。设在 $x=a$ 的边界上分布剪力为 V_x , 则

$$\left. \begin{aligned} \triangle \leq y \leq y_0 - \frac{v}{2} & \quad V_x = 0 \\ y_0 - \frac{v}{2} \leq y \leq y_0 + \frac{v}{2} & \quad V_x = q \\ y_0 + \frac{v}{2} < y \leq b & \quad V_x = 0 \end{aligned} \right\}$$

(43)

]

设

$$V_x = \sum_{n=1,3,5} S_n \sin \frac{n\pi y}{2b}$$

$$S_n = \frac{2}{b} \int_0^b V_x \sin \frac{n\pi y}{2b} dy = \frac{2}{b} \int_{y_0-\frac{v}{2}}^{y_0+\frac{v}{2}} q \sin \frac{n\pi y}{2b} dy = \frac{8q}{n\pi} \sin \frac{n\pi y_0}{2b} \sin \frac{n\pi v}{4b}$$

(44)

显然在 $x=a$ 的边界上 $y=y_0$ 处作用向下的集中力 P 时, 有

$$S_n = \frac{2P}{b} \sin \frac{n\pi y_0}{2b}$$

(45)

这时可将式(18)的右端项进行相应修改, 见表 4 示。在其它边界上作用荷载时处理方法类同。

表 5 自由边 $x=a$ 上作用向下剪力时计算结果($\triangle_B=0$)

计算点	类别	全长均布剪力 q		$y=b/2$ 为中心, $v=b/2$ 范围内作用局部均布剪力 q		$y=b/2$ 处作用集中力 P	
		本文值 $k=7$	有限元值	本文值 $k=5$	有限元值	本文值 $k=5$	有限元值
1	W	0.1018	0.1038	0.0534	0.0545	0.1094	0.1109
	M_x	-0.0101	-0.0114	-0.0080	-0.0089	-0.0194	-0.0219
	M_y	0.0841	0.0858	0.0608	0.0609	0.1348	0.1379
C	W	0.3572	0.3641	0.1781	0.1820	0.3609	0.3641
B	反力	-0.9699	-1.0*	-0.4988	-0.5*	-0.9904	-1.0*

注:反力向上为负值,带*者为理论反力值。

算例 2:正方形板, $\mu=0.3$ 。表 5 列出在自由边 $x=a$ 上作用向下剪力时板中点(1 点)和自由角点 C 的挠度系数和弯矩系数以及支承角点 B 的支反力系数。表中 k 为级数的取项数,结果与有限元值或理论反力值吻合。

1.3 自由角点作用单位集中力

图 1(a)所示的矩形板,在自由角点 C 作用向下的单位力时,挠度 W 应满足式(1)对应的齐次微分方程和下式所示的角点条件:

$$R_c=-2D(1-\mu)\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}\Big|_{x=a,y=b}=-1$$

(46)

设 $W=W_1+W_2$, W_1 为通解,仍取式(4)的形式, W_2 为特解,取

$$W_2=\frac{xy}{2(1-\mu)D}$$

(47)

由此得式(17)~式(24)右端全为零,即八个待定常数均为零值,有

$$W=\frac{xy}{2(1-\mu)D}+\frac{\triangle_B}{a}$$

(48)

当 $\triangle_B=0$ 时,对 $\mu=0.3$ 的方板中点挠度系数为 0.1786(有限元值为 0.1808),自由角点挠度系数为 0.7143(有限元值为 0.7233),板内各点的弯矩和剪力均为零值,与有限元结果相符。由于自由角点的集中力无法展成式(8)所示的双重三角级数形式, W_2 无法采用双重三角级数特解。

2 一边简支二角点支承的矩形板

一边简支二角点支承的矩形板在任意荷载作用下的弯曲可以采用叠加法计算。即撤去一个角点支承而代之以未知力 R ,分别计算一边简支一角点支承矩形板在原荷载和自由角点单位集中力作用下的弯曲。由自由角点在支座方向的位移条件:挠度为零或等于确定的支座沉陷值,求出角点支承力 R ,利用叠加法可求出原结构体系的弯曲解。

参考文献

1 S·铁摩辛柯, S·沃诺斯基著·板壳理论·科学出版社·1977

2 许琪楼,姬同庚·二邻边支承其余边自由的矩形板在均布荷载作用下的弯曲解·土木工程学报·1995·3

United Solution Method on Rectangularplate Bending with
One simply SupportedEdge and One or Two Corner Points Resting

Xu Qilou jiang Rui Tang Guoming
(Zhengzhou University of Technology)

Abstract Using the united method in this paper, the bending solution of the rectangular plates with one simply supported edge and one or two corner points resting can be derived under arbitrary load. The method has the advantage of clear thinking , rapidly converging and high precision.

Keywords bending of elastic plate; rectangular plate; united solution

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>