第19卷 第1期　　郑州工业大学学报　　Vol.19 No.1
1998年 3 月　　Journal of Zhengzhou University of Technology　　Mar. 1998

多元随机回归系数和参数的线性估计可容许的几个结果

艾明要　　　　石　磊

(河南财经学院信息系,郑州,450002)　　(郑州工业大学)

摘　要　在两种矩阵损失函数下讨论随机效应多元线性模型中回归系数和参数的线性估计的可容许性,并且在齐次和非齐次线性估计类中分别得到了可容许估计的充要条件。

关键词　多元线性模型;随机效应;可容许性

中图分类号　O212.4

0　引言

设 A、B 均为矩阵,记号 $A\geqslant 0$ 表示 A 是对称的非负定方阵;$A\geqslant B$ 表示 $A-B\geqslant 0$;$\mu(A)$表示由 A 的列向量所张成的线性空间;A^+表示 A 的 *Moore*—*Penrose* 广义逆,即 A^+满足 $AA^+A=A$,$A^+AA^+=A^+$,A^+A 和 AA^+均对称;A^-表示 A 的"一"号广义逆,即 A^-满足:$AA^-A=A$;$\vec{A}$表示 A 按行拉直;$A\otimes$B 表示 A 和 B 的 Kronecker 积;"$\triangleq$"表示"定义为"。

考虑一般的随机效应多元线性模型

$$\begin{cases} \underset{n\times m}{Y}=\underset{n\times p}{X}B+e, \\ E\begin{pmatrix}B\\e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\Theta\\O\end{pmatrix}, \\ Var\begin{pmatrix}\vec{B}\\ e\end{pmatrix}=\underset{(n+p)\times(n+p)}{V}\otimes\underset{m\times m}{\Sigma} \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 Y 为可观测矩阵,B 和 e 为不可观测的随机矩阵,$\underset{p\times l}{A}$ 和 $V\geqslant 0$ 为已知矩阵,$\Sigma\geqslant 0$ 可为已知矩阵亦可为未知的参数矩阵,$\Theta\in R^{l\times m}$是未知参数。这个模型简称为模型(1.1)。

在模型(1.1)中,把 V 改为 σV,$V\geqslant 0$ 仍然已知,但 $\sigma>0$ 也是参数,这时我们称之为模型(1.2)。

分块 $V=\begin{pmatrix}V_{11}&V_{12}\\V_{21}&V_{22}\end{pmatrix}$,此处 V_{11}和 V_{22}分别为 p 阶和 n 阶方阵。由于 V_{11}不必正定,因而 B 可是非随机的,也可以是部分行向量随机而另一部分行向量非随机。

在模型(1.1)(或模型(1.2))下,有

$Var(\vec{Y})=(XV_{11}X'+V_{21}X'+XV_{12}+V_{22})\otimes\Sigma\triangleq\Lambda\otimes\Sigma(\sigma\Lambda\otimes\Sigma)$(下同)。

设 S 和 Q 分别是已知的的 $q\times l$ 和 $q\times p$ 阶矩阵,称 $S\Theta+QB$ 是线性可估的,如果存

收稿日期:1997—04—29

第一作者　男　1966年8月生　硕士学位　讲师

在 $q\times n$ 阶常数矩阵 L，使得 $E(LY-S\Theta-QB)=0$。由此易知，$S\Theta+QB$ 线性可估的充要条件是 $\mu(A'Q'+S')\subset\mu(A'X')$。

在估计 $S\Theta+QB$ 时，采用下述两种损失函数：

$$(d(Y)-S\Theta-QB)(d(Y)-S\Theta-QB)' \tag{1.3}$$

和　、　为矩

$$\left(\overline{d(Y)-S\Theta-QB}\right)\left(\overline{d(Y)-S\Theta-QB}\right)' \tag{1.4}$$

在模型(1.1)(或模型(1.2))及损失函数(1.3)下，称 $S\Theta+QB$ 的估计 $d_1(Y)$ 优于 $d_2(Y)$，如果

$E[(d_2(Y)-S\Theta-QB)(d_2(Y)-S\Theta-QB)']-E[(d_1(Y)-S\Theta-QB)(d_1(Y)-S\Theta-QB)']\geqslant 0$

对一切 Θ(和 $\sigma>0$)，且至少存在一个 $\Theta_0\in R^{l\times m}$(和 $\sigma_0>0$)使得上式左边不为零矩阵。估计 $d_0(Y)$称为在 $S\Theta+QB$ 的估计类 D 中是可容许的，如果 $d_0(Y)\in D$，且在 D 中不存在优于 $d_0(Y)$的估计。此时记为 $d_0(Y)\overset{D}{\underset{1}{\sim}}S\Theta+QB$。

完全类似地，我们可以定义，在模型(1.1)(或模型(1.2)及损失函数(1.4)下，$d_0(Y)$是 $S\Theta+QB$ 在估计类 D 中的可容许估计。简记为 $d_0(Y)\overset{D}{\underset{2}{\sim}}S\Theta+QB$。

本文总假定 $V\neq 0$，$\Sigma\neq 0$，否则模型就变为非随机的。并且只考虑两个估计类，即齐次线性估计类 $H=\{LY:L$ 为 $q\times n$ 阶矩阵$\}$ 和线性估计类 $L=\{LY+a:L$ 和 a 分别是 $q\times n$ 和 $q\times m$ 阶矩阵$\}$。

当 $m=1$ 时，吴启光在文献[1]中给出了 $S\Theta+QB$ 的估计 LY 在 H 中($LY+a$ 在 L 中)可容许的充要条件。本文证明了，当 $m\geqslant 2$ 时，上述两种形式不同的损失函数下，$S\Theta+QB$ 的估计 $LY(LY+a)$在 H (L)中可容许的充要条件与 $m=1$ 时完全相同。

1　引理

考虑非随机的多元线性模型

$$\begin{cases} \underset{n\times m}{Y}=XA\Theta+e \\ E(e)=0,\ Var(\vec{e})=\Lambda\otimes\Sigma \end{cases} \tag{2.1}$$

其中各符号的定义同模型(1.1)中一致。

同样，若将 Λ 换成 $\sigma\Lambda$ 后，$\sigma>0$ 为参数。此时我们称之为模型(2.2).

引理 1.1　在模型(2.1)(或模型(2.2))和损失函数$(d(Y)-S\Theta)(d(Y)-S\Theta)'$下，若 $S\Theta$ 线性可估，则 LY 在 H 中是 $S\Theta$ 的可容许估计的充要条件是：

(1) $L\Lambda=LXA(A'X'G^{+}XA)^{-}A'X'G^{+}\Lambda$；(等价地，$\mu(\Lambda L')\subset\mu(XA)$)

(2) $LXA=S$ 或者 $LXA\neq S$ 时，对任意 $b\in(0,1)$有

$$g(b,L)\triangleq LXATA'X'L'-STS'+b(LXA-S)T(LXA-S)'\geqslant 0 \tag{2.3}$$

不成立。此处 $G\triangleq\Lambda+XAA'X'$，$T\triangleq(A'X'G^{+}XA)^{-}A'X'G^{+}\Lambda G^{+}XA(A'X'G^{+}XA)^{-}$。(下同)

此引理由文献[2]中定理 3.1 的证明过程可得。

引理 1.2　在模型(2.1)(或模型(2.2)和损失函数$(d(Y)-S\Theta)(d(Y)-S\Theta)'$下，若 $S\Theta$ 线性可估，则 $LY+a$ 在 L 中是 $S\Theta$ 的可容许估计的充要条件是：

(1) L 满足引理1.1中的条件(1)；

(2)当 $LXA=S$ 时，$a=0$；当 $LXA\neq S$ 时，对任 $b\in(0,1)$ 有 $g(b,L)\geqslant 0$ 不成立。此处 $g(b,L)$ 见(2.3)式。

引理1.3　在模型(2.1)(或模型(2.2))下，若 SⒽ不是线性可估的，则在损失函数(d(Y)－SⒽ)(d(Y)－SⒽ)$'$下，LY＋a 在 L 中是 SⒽ的可容许估计的充要条件是：

$$L\wedge=LXA(A'X'G^{+}XA)^{-}A'X'G^{+}\wedge$$

引理1.2和引理1.3的证明可仿文献[3]中定理1和定理2得到。

2　损失函数(1.3)下的可容许性

本节在模型(1.1)(或模型(1.2))和损失函数(1.3)下，讨论 SⒽ＋QB 的估计 LY ($LY+a$)在估计类 H ( )中的可容许性。

定理2.1　在模型(1.1)或模型(1.2)下，若 SⒽ＋QB 线性可估，则下述三个条件等价：

1° LY $\overset{\text{HL}}{\underset{1}{\text{S}}}$ ○＋QB；

2° L 满足：

(1) $L\wedge=LXA(A'X'G^{+}XA)^{-}A'X'G^{+}\wedge+Q(V_{11}X'+V_{12})[I-\wedge^{+}XA(A'X'G^{+}XA)^{-}A'X'G^{+}\wedge]$，(等价地，$\mu(\wedge L'-(V_{21}+XV_{11})Q')\subset\mu(XA)$)

(2) $LXA=S+QA$ 或 $LXA\neq S+QA$ 时，对任 $b\in(0,1)$，有 $b(LXA-S-QA)T(LXA-S-QA)'+LXATA'X'L'-(S+QA)T(S+QA)'-Q(V_{11}X'+V_{12})\wedge^{+}XAT(LXA-S-QA)'-(LXA-S-QA)TA'X'\wedge^{+}(V_{21}+XV_{11})Q'\geqslant 0$ 不成立。

3° L 满足：

(1) $L\wedge=LXA(A'X'G^{+}XA)^{-}A'X'G^{+}\wedge+Q(V_{11}X'+V_{12})[G^{+}-G^{+}XA(A'X'G^{+}XA)^{-}A'X'G^{+}]\wedge$；

(2) $LXA=S+QA$ 或 $LXA\neq S+QA$ 时，对任 $b\in(0,1)$，有 $f(b,L)\triangleq b(LXA-S-QA)T(LXA-S-QA)'+LXATA'X'L'-(S+QA)T(S+QA)'-(LXA-S-QA)(A'X'G^{+}XA)^{-}A'X'G^{+}(XV_{11}+V_{21})Q'-Q(V_{11}X'+V_{12})G^{+}XA(A'X'G^{+}XA)^{-}(LXA-S-QA)'\geqslant 0$　(3.1)
不成立。

证：仅对模型(1.1)证之，对模型(1.2)的证明类似。

$$\begin{aligned}&E(LY-S\text{Ⓗ}-QB)(LY-S\text{Ⓗ}-QB)'\\&=(tr\Sigma)[L\wedge L'+QV_{11}Q'-L(V_{11}+V_{21})Q'-Q(V_{11}X'+V_{12})L']+(LXA-S-QA)\text{Ⓗ}\text{Ⓗ}'(LXA-S-QA)'\\&=(tr\Sigma)[L-Q(V_{11}X'+V_{12})\wedge^{+}]\wedge[L-Q(V_{11}X'+V_{12})\wedge^{+}]'+(LXA-S-QA)\text{Ⓗ}\text{Ⓗ}'(LXA-S-QA)'+[QV_{11}Q'-Q(V_{11}X'+V_{12})\wedge^{+}(V_{21}+XV_{11})Q'](tr\Sigma)\\&=E\{[L-Q(V_{11}X'+V_{12})\wedge^{+}]Y-[S+QA-Q(V_{11}X'+V_{12})\wedge^{+}XA]\text{Ⓗ}\}\{[L-Q(V_{n}X'+V_{12})\wedge^{+}]Y-[S+QA-Q(V_{11}X'+V_{12})\wedge^{+}XA]\text{Ⓗ}\}'+(tr\Sigma)[QV_{11}Q'-Q(V_{11}X'+V_{12})\wedge^{+}(V_{21}+XV_{11})Q']\end{aligned}\quad(3.2)$$

因此，在原问题下，LY $\overset{\text{HL}}{\underset{1}{\text{S}}}$ Ⓗ＋QB 的充要条件是，在模型(2.1)(或模型2.2)和损失

函数

$$\{(d(Y)-[S+QA-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{+}XA]\Theta\}\{(d(Y)-[S+QA-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{+}XA]\Theta\}' \tag{3.3}$$

下，$[L-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{+}]Y$ 是 $[S+QA-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{+}XA]$ 的可容许估计。由引理 2.1 知后者等价于本定理的条件 2°。2° 等价 3° 的证明可参见文献[3]中定理 4.1。

定理 3.2 在模型(1.1)或模型(1.2)下，若 $S\Theta+QB$ 线性可估，则 $LY+a \overset{HL}{\underset{1}{S}} S\Theta+QB$ 的充要条件是：

(1)L 满足定理 3.1 中的 3(1)；

(2)当 $LXA=S+QA$ 时，$a=0$；当 $LXA\neq S+QA$ 时，对任 $b\in(0,1)$，有 $f(b,L)\geqslant 0$ 不成立，此处 $f(b,L)$ 见(3.1)式。

证：仅对模型(1.1)证之，对模型(1.2)的证明类似。

$$\begin{aligned}&E(LY+a-S\Theta-QB)(LY+a-S\Theta-QB)'\\&=E\{[L-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{+}]Y+a-[S+QA-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{+}XA]\Theta\}\{[L-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{+}]Y+a-[S+QA-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{+}XA]\Theta\}'+(tr\Sigma)[QV_{11}Q'-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{+}(V_{21}+XV_{11})Q']\end{aligned}$$

用定理 3.1 的证明方法，并应用引理 2.2，可得定理 3.2 成立。

定理 3.3　在模型(1.1)或模型(1.2)下，若 $S\Theta+QB$ 不是线性可估的，则 $LY+a \overset{HL}{\underset{1}{S}} S\Theta+QB$ 的充要条件是：L 满足定理 3.1 中 $3^\circ(1)$。

证：因为在模型(1.1)(或模型(1.2))下，$S\Theta+QB$ 线性可估的充要条件是在模型(2.1)(或模型(2.2))下，$[S+QA-Q(V_{11}X'+V_{12})\Lambda^{+}XA]\Theta$ 线性可估，用定理 3.2 的证明方法，并应用引理 2.3 知本定理成立。

3　损失函数(1.4)下的可容许性

本节在模型(1.1)(或模型(1.2))和损失函数(1.4)下，讨论 $S\Theta+QB$ 的估计 $LY(LY+a)$ 在估计类 $HL(L)$ 中的可容许性，并且得到了与 2 中完全相同的充要条件。

定理 4.1　在模型(1.1)或模型(1.2)下，若 $S\Theta+QB$ 线性可估，则下述两命题等价：

(1)$LY \overset{HL}{\underset{1}{S}} S\Theta+QB$；

(2)$LY \overset{HL}{\underset{1}{S}} S\Theta+QB$。

证：仅对模型(1.1)证之。

对模型(1.1)按行拉直后得到一元线性模型

$$\begin{cases}\vec{Y}=(X\otimes I)\vec{B}+\vec{e}\\ E\begin{pmatrix}\vec{B}\\ \vec{e}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(A\otimes I)\vec{\Theta}\\ 0\end{pmatrix}\quad 对模 \quad -S\\ Var\begin{pmatrix}\vec{B}\\ \vec{e}\end{pmatrix}=V\otimes\Sigma \quad V \quad -Q\end{cases} \tag{4.1}$$

损失函数 $\overline{(LY-S\Theta-QB)}\,\overline{(LY-S\Theta-QB)}'$

$$=[(L\otimes I)\vec{Y}-(S\otimes I)\vec{\Theta}-(Q\otimes I)\vec{B}][(L\otimes I)\vec{Y}-(S\otimes I)\vec{\Theta}-(Q\otimes I)\vec{B}]' \tag{4.2}$$

因此，原问题下，$LY \overset{HL}{\underset{1}{\sim}} S\Theta+QB$ 的充要条件是在模型(4.1)和损失函数(4.2)下，$(L\otimes I)\vec{Y}$ 是$(S\otimes I)\vec{\Theta}+(Q\otimes I)\vec{B}$]在估计类$\overline{HL}=\{(L\otimes I)\vec{Y}: L$ 是 $q\times n$ 阶矩阵$\}$中的可容许估计。又模型(1.1)下 $S\Theta+QB$ 线性可估等价于模型(4.1)下$(S\otimes I)\vec{\Theta}+(Q\otimes I)\vec{B}$线性可估。再利用 kronecker 积的有关性质可知本定理成立。

利用上述类似的证明方法，可得到相应于 2 中定理 3.2 和定理 3.3 的下述两个定理。

定理 4.2　在模型(1.1)或模型(1.2)下，若 $S\Theta+QB$ 线性可估，则下述两命题等价：

(1)$LY+a \overset{L}{\underset{1}{\sim}} S\Theta+QB$；

(2)$LY+a \overset{L}{\underset{2}{\sim}} S\Theta+QB$。

定理 4.3　在模型(1.1)或模型(1.2)下，若 $S\Theta+QB$ 不是线性可估，则下述三条件等价：

(1)$LY+a \overset{L}{\underset{1}{\sim}} S\Theta+QB$；

(2)$LY+a \overset{L}{\underset{2}{\sim}} S\Theta+QB$；

(3)L 满足定理 3.1 中 3°(1)。

参考文献

1　吴启光．随机回归系数和参数的线性估计的可容许性的几个结果．应用数学学报．1988．11(1)：95－106

2　吴启光．一般的 Gauss－Markoff 模型中回归系数的线性估计的可容许性．应用数学学报．1986．9(2)：251－256

3　吴启光．矩阵损失下回归系数的非齐次线性估计的可容许性．应用数学学报．1987．10(4)：428－433

4　倪国熙．常用的矩阵理论和方法．上海科学技术出版社．1984

Several Results of Admissibility for Linear Estimates on Multivariate Random Regression Coefficients and Parameters

Ai Mingyao

(*Henan Institute of Finance and Economics*)

Shi Lei

(*Zhengzhou University of Technology*)

Abstract　We consider the admissibility for linear estimates on regression coefficients and param eters in multivariate random effect linear model under two kinds of matrix loss functions. The necessary and sufficient conditions for admissible estimates among the classes of homogeneous and nonhomogeneous linear estimates are gained respectively.

Keywords　multivariate linearmodel; random effect; admissibility