

刚架结构动态灵敏度分析中的 自由度释放问题

林炳尧

王 伟

苗同臣

(齐鲁石化公司技工学校, 淄博 255411) (郑州工业大学数力系)

摘 要 利用摄动有限元方法研究了结构动态灵敏度分析中的自由度释放问题。概念清楚、计算机实施简便, 为大型复杂结构的动力计算和动力修改提供了可靠的计算方法。

关键词 刚架结构; 动态灵敏度; 摄动有限元法; 自由度释放

中图分类号 O313.3

0 引言

摄动有限元法用于结构的动力计算和灵敏度分析, 为解决工程实际结构的动力修改和优化设计问题提供了有效实用的计算方法^[1,2], 并在实际工程结构中得以应用^[3], 但均未涉及单元的约束自由度释放问题, 而这类问题在工程中经常遇到, 例如单元某一结点为不完全刚结点(铰结点、双链杆结点等)或结构在使用或搬迁过程中某些构件局部发生损伤或破坏, 这样与之相关的梁单元就要进行自由度释放。

自由度释放后的结构刚度减弱, 动态承载能力变小。为重新求解结构的动态参数, 一般是采用有限元重分析方法, 这在时间上和经济上都是一种不必要的浪费。本文通过梁单元自由度释放时刚度阵和质量阵的修正公式, 利用摄动有限元方法将自由度释放问题在结构的动力计算和灵敏度分析中加以实现。

1 梁单元自由度释放时刚度矩阵和质量矩阵的修正公式

结构无阻尼振动时, 局部坐标下梁单元的运动方程可写为^[4]:

$$\{N\} = ([k] - \omega^2[m])\{\delta\} + \{F\} \quad (1)$$

其中 $\{N\}$ 为结点力、 $\{F\}$ 为固端力、 $\{\delta\}$ 为杆端位移、 $[k]$ 、 $[m]$ 分别为单元刚度和质量矩阵、 ω 为振动固有频率。

若释放单元的第 s 个自由度 δ_s , 则 $N_s=0$, 可导出 $[k]$ 和 $[m]$ 的修正公式^[4]:

$$k_{ij}^* = k_{ij} - \frac{k_{is}}{k_{ss}}k_{sj} \quad (2)$$

$$m_{ij}^* = m_{ij} - \frac{k_{is}}{k_{ss}}m_{sj} - \frac{k_{sj}}{k_{ss}}m_{is} - \frac{k_{is}k_{sj}}{k_{ss}^2}m_{ss} \quad (3)$$

收稿日期 1997-09-29

第一作者 男 1961 年 2 月生 学士学位 讲师

其中 k_{ij} 、 m_{ij} 、 k_{ij}^* 和 m_{ij}^* 分别为自由度退化前后的单元刚度和质量矩阵的元素。

若要同时释放几个自由度,只要利用(2)、(3)式多次修正即可。

为书写方便,将(2)、(3)式写为:

$$[k^*] = [k] + \Delta[k] \quad (4)$$

$$[m^*] = [m] + \Delta[m] \quad (5)$$

2 动态灵敏度分析的摄动有限元法

结构的广义特征值问题可写为:

$$([K] - \lambda[M])\{u\} = \{0\} \quad (6)$$

若结构的某些参数 P_i (例如弹性模量 E 、密度 ρ 、横截面积 A 、惯性矩 J 等) 发生变化, 写为:

$$P_i = P_{i0}(1 + \epsilon_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

这里 P_{i0} 为参数的初值, $|\epsilon_i| < 1$ 为无量纲小量。则相应的刚度矩阵、质量矩阵和特征参数 $\{u\}$ 和 λ 都将随之改变:

$$[K] = [K_0] + \sum_{i=1}^n [K_i] \epsilon_i \quad (7)$$

$$[M] = [M_0] + \sum_{i=1}^n [M_i] \epsilon_i \quad (8)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \epsilon_i \quad (9)$$

$$\{u\} = \{u_0\} + \sum_{i=1}^n \{u_i\} \epsilon_i \quad (10)$$

这里 $[K_0]$ 、 $[M_0]$ 、 λ_0 、 $\{u_0\}$ 分别与参数初值 P_{i0} 相对应, $[K_i]$ 、 $[M_i]$ 、 λ_i 、 $\{u_i\}$ 为参数 p_i 变化时刚度矩阵、质量矩阵和特征参数的摄动量(即变化量)。

将式(7)~(10)代入(6)即得到特征值问题的一阶摄动公式^[3]:

$$\lambda_i = \{u_0\}^T ([K_i] - \lambda_0 [M_i]) \{u_0\} \quad (11)$$

$$\{u_i\} = -([K_0] - \lambda_0 [M_0])^{-1} ([K_i] - \lambda_0 [M_i] - \lambda_i [M_0]) \{u_0\} \quad (12)$$

定义结构的第 r 阶特征对 λ^r 、 $\{u^r\}$ 对摄动参数 P_i 的一阶灵敏度为:

$$\lambda_{r,i}^* = \frac{\partial \lambda^r}{\partial \epsilon_i}, \quad \{u_{r,i}^*\} = \frac{\partial \{u^r\}}{\partial \epsilon_i} \quad (13)$$

将式(9)、(10)代入(13)得:

$$\lambda_{r,i}^* = \lambda_i^r, \quad \{u_{r,i}^*\} = \{u_i^r\} \quad (14)$$

3 梁单元自由度释放在动态灵敏度分析中的实现

在整体坐标下将(4)、(5)式写为:

$$[K^e] = [K_0^e] + \Delta[K^e] \quad (15)$$

$$[M^e]=[M_0]+\Delta[M^e]$$

(16)

若结构多个自由度释放,可利用有限元法刚度集成的办法将(15)、(16)式集成为(7)、(8)式所示的整体刚度和质量矩阵,这里 $[K]$ 、 $[M]$ 为自由度释放后整体结构的刚度和质量矩阵, $[K_0]$ 、 $[M_0]$ 为梁单元自由度释放前的整体刚度和质量矩阵, $[K_i]=\Delta[K]$, $[M_i]=\Delta[M]$ 分别为释放第 i 个自由度所引起的整体刚度和质量矩阵的增量。

若已知梁单元自由度释放前的特征值和特征向量 λ_0 、 $\{u_0\}$,利用式(9)~(14)很容易求出自由度释放后结构的特征值 λ 和特征向量 $\{u\}$ 以及动特性灵敏度 λ_i 和 $\{u_i\}$ 。

综上所述分析过程可知,整个计算过程只是矩阵的简单运算,无需有限元重分析时的特征值求解,从而大大节省了运算时间。

4 算例与结论

图 1 为一钢筋混凝土刚架结构,整体尺寸为 $1.0\text{m}\times 1.2\text{m}\times 1.16\text{m}$,四根立柱横截面尺寸为 $0.1\text{m}\times 0.1\text{m}$,四根横梁截面尺寸为 $0.1\text{m}\times 0.08\text{m}$,将其划分为 16 个结点和 16 个单元。

表 1 给出了将 5 和 15 刚结点同时退化为铰结点时本文方法和有限元重分析方法所得的前四阶固有振动频率,并给出了两结点退化后各自引起的特征值的灵敏度。

由表 1 可看出:

(1)由本文方法和有限元重分析所得的振动频率相差很小,而计算前 10 阶特征对所需的时间,本文方法为 11.37 秒,重分析方法为 18.90 秒,对大型复结构就更显其优越性。

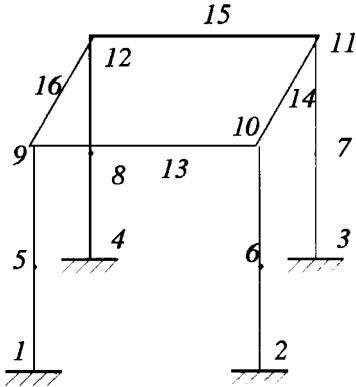


图 1 钢筋混凝土结构
计算简图

表 1 刚架结构自由度释放后的振动频率(Hz)及特征值灵敏度

频率阶次	1	2	3	4
本文方法	29.558	30.062	36.988	55.811
重分析方法	29.429	29.798	36.805	55.799
误差(%)	0.438	0.886	0.497	0.022
N5 灵敏度	-39.77	-31.63	-846.51	-49.53
N15 灵敏度	0.01	-36.24	-189.63	-84.40

(2)结构结点自由度退化后使原结构的每一阶特征值都减小(灵敏度小于零),这和一般的物理概念完全吻合。就前四阶振动频率相比,第 5 和 15 结点的自由度释放都对第 3 阶频率影响最大,第 5 结点刚度对第 2 阶频率变化最灵敏,第 15 结点的刚度对第 1 阶频率几乎没有影响。由此可知,通过灵敏度分析可以很方便地看出不同结点自由度释放对不同阶次振动频率的影响程度(特别是对工程结构影响最大的低阶频率),以便及时有目的地修改结构,避免或调整有害的振动频率(例如共振频率)数值。

综上所述,本文方法可用于工程中大型复杂的动力计算动力修改和优化设计,理论正确、计算简便可靠,并可推广到其它单元类型自由度释放时的灵敏分析中去。

参考文献

- 1 陈塑寰. 结构振动分析的矩阵摄动理论. 重庆出版社 1991
- 2 胡海昌. 参数小变化对本征值的影响. 力学与实践. 1981. 3(2)
- 3 苗同臣, 王伟, 陈淮. 石油钻井塔架结构的动特性灵敏度分析. 石油机械. 1996(3): 39~42
- 4 曾又林. 结构动力分析时梁单元自由度的释放. 计算结构力学及其应用. 1995. 12(1): 122~126

Releasing of Constraint Freedoms of Frame Structure and Applications to Analysis of Structural Dynamic Sensitivity

Lin Bingyao

(*Technical School, Qilu Petrochemical Corporation, Zibo, 255411*)

Wang Wei Miao Tongchen

(*Zhengzhou University of Technology*)

Abstract This paper studies the problems of releasing constraint freedoms of frame structure for the analysis of structural method. It has a clear concept and correct theory and it is very easy to put into effect for computers. A reliable and practical calculating method is provided for the dynamic calculation, modification and optimal design of the large and complex structures.

Keywords perturbation finite element; frame structure; dynamic sensitivity; releasing of constraint freedoms