

粘性土坡稳定性的三维变分分析

刘忠玉 刘 伟 李国卿
(郑州工业大学土建系) (河南中原大化集团, 濮阳, 457000)

摘 要 基于三维滑坡模型和简布(Janbu·N)的简化假设, 将粘性土坡的稳定性问题等价于 1 个双参变量函数的待定边界的泛函的变分问题, 利用变分法, 推导了滑裂面所应满足的偏微分方程(欧拉方程)和横截性条件。本方法可以确定三维滑裂面形状和安全系数, 同时可研究滑坡的宽度效应。

关键词 粘性土坡; 稳定性; 安全系数; 滑裂面形状; 滑坡; 宽度效应

中图分类号 TU12

研究边坡稳定性问题时, 往往将土坡假设为平面应变问题, 即滑裂面在斜坡长度方向上是无限的。但是, 任何边坡的崩塌或滑坡在宽度上都是有限的, 因此有必要进行三维分析。本文考虑一般粘性土($c \neq 0, \varphi \neq 0$)坡的稳定性问题。假设土质均匀, 并引入简布的简化假设, 即不考虑微元柱侧面的柱间力, 基于三维滑坡模型, 推导了安全系数公式, 并将它等价于 1 个边界待定的泛函问题, 利用变分原理得到相应的欧拉方程和横截性条件, 考虑边界条件后, 就可得到滑裂面形状函数 $z(x, y)$ 以及相应的安全系数 F_s , 同时可研究滑坡的宽度效应。

1 安全系数的推导

设坡面函数为 $f(x, y)$, 滑裂面形状函数为 $z(x, y)$, 二者交线为:

$$\begin{cases} x = \bar{x}(s) \\ y = \bar{y}(s) \end{cases}$$

(1)

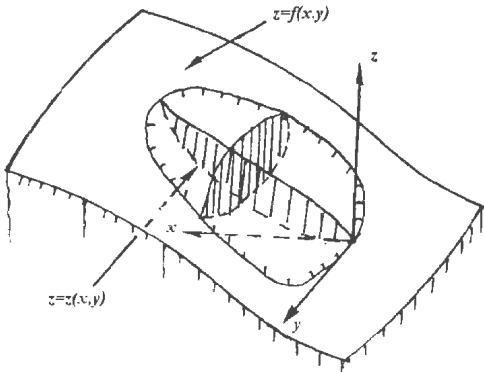


图 1 滑裂面三维模型

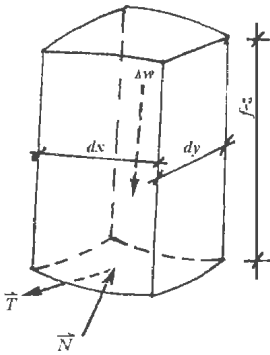


图 2 微元柱

这里 s 是交线上从某一固定点起算的曲线长度(图 1)。从滑坡体任选一微元柱(图 2), 在不考虑柱间力时, 其上作用有以下几种力: 重力 $\Delta \vec{W}$, 其底部的正压力 \vec{N} 和剪切力 \vec{T} 。不妨认

收稿日期: 1997-11-11

第一作者 男 1968 年 5 月生 硕士学位 讲师

为 $\Delta \vec{W}$ 正好通过底部形心, \vec{N} 和 \vec{T} 正好作用在底部形心上, 这里

$$\begin{aligned}\Delta \vec{W} &= (f - z) \gamma dxdy \\ \vec{T} &= \{T_x, T_y, T_z\}\end{aligned}\quad (2)$$

$$T = |\vec{T}| = \tau dA = \tau \sqrt{(1 + z_x'^2)(1 + z_y'^2)} dxdy \quad (3)$$

$$\vec{N} = -N\vec{n}, \quad N = \sigma dA = \sigma \sqrt{(1 + z_x'^2)(1 + z_y'^2)} dxdy \quad (4)$$

其中 γ 为土的重度, dA 是土柱底部的面积, σ, τ 是作用于土柱底形心上的正应力与剪应力, \vec{n} 是其外法线方向, 且 $\vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$ 。考虑微元柱力的平衡, 以及 $\vec{T} \perp \vec{N}$, 可得

$$N = \frac{n_z T}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}} \quad (5)$$

$$T_z = T \sqrt{1 - n_z^2} = T \sqrt{n_x^2 + n_y^2} \quad (6)$$

$$\sigma = \frac{\tau}{\sqrt{z_x'^2 + z_y'^2}} \quad (7)$$

根据摩尔—库仑准则

$$\tau_f = c + \sigma \operatorname{tg} \varphi \quad (8)$$

以及安全系数定义

$$F_s = \tau_f / \tau \quad (9)$$

可得

$$\tau = \frac{c \sqrt{z_x'^2 + z_y'^2}}{F_s \sqrt{z_x'^2 + z_y'^2} - \operatorname{tg} \varphi} \quad (10)$$

另外, 由微元柱的关于 z 轴的力矩平衡, 并化简得

$$\Delta W = T_z + N_z = \gamma(f - z) dxdy \quad (11)$$

当取遍所有土柱时, 可得

$$\iint_D \gamma(f - z) \sqrt{z_x'^2 + z_y'^2} dxdy = \frac{\iint_D [c(1 + z_x'^2 + z_y'^2) + \gamma(f - z) \operatorname{tg} \varphi] dxdy}{F_s} \quad (12)$$

其中 D 为滑裂面在 $x-y$ 平面上的投影区域, D 的边界记为 C 。从而可得安全系数公式为:

$$F_s = \frac{I(z, z_x', z_y'; x, y)}{J(z, z_x', z_y'; x, y)} \quad (13)$$

$$\text{式中} \quad I(z, z_x', z_y'; x, y) = \iint_D [c(1 + z_x'^2 + z_y'^2) + \gamma(f - z) \operatorname{tg} \varphi] dxdy \quad (14a)$$

$$J(z, z_x', z_y'; x, y) = \iint_D \gamma(f - z) \sqrt{z_x'^2 + z_y'^2} dxdy \quad (14b)$$

2 欧拉方程与横截性条件

从式(13)可看出, 对于给定的土坡, 只要能确定滑裂面形状 $z(x, y)$ 以及区域 D , 我们就可以求出对应的安全系数。但是一般情况下, $z(x, y)$ 、区域 D 都是未知的, 因此我们可以把 F_s 看作是 1 个边界待定的泛函。土坡最小的安全系数即对应着泛函 $F_s(z, z_x', z_y'; x, y)$ 的极小值。由变分原理^[1], 泛函 F_s 等价于下述泛函:

$$\Pi(z, z_x', z_y'; x, y) = I - F_s J = \iint_D F(x, y, z, z_x', z_y') dxdy \quad (15)$$

$$\text{式中} \quad F(x, y, z, z_x', z_y') = c(1 + z_x'^2 + z_y'^2) + \gamma(f - z) \operatorname{tg} \varphi - F_s \gamma(f - z) \sqrt{z_x'^2 + z_y'^2} \quad (16)$$

此处 F_s 可看成 Lagrange 乘子。

对式(15)进行变分,我们可得欧拉方程:

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial z_x'} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial z_y'} \right) = 0, \quad \text{在区域 } D \text{ 内} \tag{17}$$

以及横截性条件:

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dy}{ds} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dx}{ds} \right] \left[\frac{\partial F}{\partial z_x'} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{\partial z_y'} \frac{dx}{ds} \right] + F = 0, \quad \text{在边界 } C \text{ 上} \tag{18}$$

再加上边界条件 $f(x, y) - z(x, y) = 0, \quad \text{在边界 } C \text{ 上} \tag{19}$

泛函 Π 的极值问题才有充要条件的解。

将式(16)代入式(17)、(18)可得滑裂面所需满足的偏微分方程。为简单起见,我们假设沿坡长 y 方向上滑裂面比较平,即我们可忽略 z_y' 的更高阶项,可得:

$$z_{xx}'' + z_{yy}'' - \frac{\gamma F_s f - z}{2c} z_{xy}'' = \frac{\gamma(F_s f_x' - \text{tg } \varphi)}{2c}, \quad \text{在区域 } D \text{ 内} \tag{20}$$

$$2 \left[(f_x' - z_x') \frac{dy}{ds} - (f_y' - z_y') \frac{dx}{ds} \right] \left[z_x' \frac{dy}{ds} - z_y' \frac{dx}{ds} \right] + 1 + z_x'^2 + z_y'^2 = 0, \quad \text{在边界 } C \text{ 上} \tag{21}$$

以上各式中若令 $\varphi=0$,即为文献[1]的结果。若假设滑裂面与 y 无关,即假设为平面应变问题,以上各式即为文献[3]的结果。

很明显,对于一个确定的土坡,只要我们能解出欧拉方程(20)的解 $z(x, y, F_s)$,并将其代入安全系数公式(13),即得到一个关于 F_s 的方程,求解之,其最小的正解即为该土坡的安全系数,相对应的 $z(x, y, F_s)$ 即为真正的潜在滑裂面。

3 算例与结论

作为例子,取简单土坡函数为

$$f(x, y) = x \text{tg } \alpha \tag{22}$$

式中 α 为坡角。为得到 1 个简单的分析结果,认为在区域 D 内 z_{yy}'' 很小,在边界 C 附近($f - z \rightarrow 0$),那么式(20)中的非线性项 $\frac{\gamma F_s (f - z)}{2c z_x'} z_{yy}''$ 可忽略不计^[2],则式(20)化为线性方程:

$$z_{xx}'' + z_{yy}'' = k \tag{23}$$

式中 $k = \frac{\gamma(F_s \text{tg } \alpha - \text{tg } \varphi)}{2c} \tag{24}$

考虑横截性条件式(21)和边界条件式(19)后,可得滑裂面形状函数为:

$$z(x, y) = \frac{k(x^2 + y^2)}{4} - \frac{(1 - \sin \alpha)x}{\cos \alpha} \tag{25}$$

由式(22), (25)可得滑坡周界为:

$$\frac{k(x^2 + y^2)}{4} - \frac{x}{\cos \alpha} = 0 \tag{26}$$

从而潜在滑坡体宽度为

$$B = \frac{4}{k \cos \alpha} = \frac{8c}{\gamma(F_s \text{tg } \alpha - \text{tg } \varphi) \cos \alpha} \tag{27}$$

以上各式中,若令 $\varphi=0$,即为文献[2]结果。令 $F_s=1$,即临界状态时,

$$B_{cr} = \frac{8c}{\gamma(\text{tg } \alpha - \text{tg } \varphi)\cos \alpha} \tag{28}$$

由上式可知,当 $\alpha < \varphi$ 时, $B_{cr} < 0$,这说明此时不可能滑坡;当 $\alpha = \varphi$ 时, $B_{cr} = \infty$,这说明此时若滑坡,滑坡体宽度将无限大,即此时才可视为平面应变问题;当 $\alpha > \varphi$ 时, $0 < B_{cr} < \infty$,这说明滑坡体有限宽。这意谓着三维滑坡模型可预测滑坡体宽度。

设式(22)所示边坡高度为 h ,若要形成形如式(25)所示滑裂面即坡面滑动型滑坡,需

$$h \geq \frac{4\text{tg } \alpha}{k\cos \alpha} \tag{29}$$

则安全系数公式为:

$$F_s = \frac{\text{tg } \varphi}{\text{tg } \alpha} + \frac{8c}{\gamma h \cos \alpha} \tag{30}$$

由文献[3]结果,平面应变滑坡模型的同种滑坡类型的安全系数为:

$$F_s = \frac{\text{tg } \varphi}{\text{tg } \alpha} + \frac{4c}{\gamma h \cos \alpha} \tag{31}$$

因此,可看出三维滑坡模型的安全系数大于平面应变滑坡模型的安全系数,所以平面应变滑坡模型偏于保守。

另外,由式(30)可知,当 $\alpha = \varphi$ 时,若 $c > 0$,则必有 $F_s > 1$,即此时粘性土坡不会发生坡面滑动型滑坡。结合式(28)的讨论,可有如下结论:当 $\alpha \leq \varphi$ 时,粘性土坡不会发生坡面滑动型滑坡;当 $\alpha > \varphi$ 时,仅可能发生有限宽度的滑坡。所以用三维滑坡模型来分析边坡稳定性比平面应变滑坡模型更接近实际。

参考文献

1 钱伟长·变分法及有限元·北京:科学出版社,1980.116~169
2 Miao Tiande. The Variational Method for Three-dimensional Analysis of Slope Stability·Proc. IVth. Int. Conf. & Field Workshop on Landslides, Tokyo, 1985; 215~218
3 刘忠玉·粘性土坡稳定性的变分分析·郑州工学院学报,1995(3); 75~82

Three-dimensional Variational Analysis of Cohesive Soil Slope Stability

Liu Zhongyu Liu Wei Li Guoqing

(Zhengzhou University of Technology)(Zhongyuan Dahua Corporation of Henan)

Abstract Based on the three-dimensional model of slope collapse and Janbu's simplified assumption, the problem of cohesive soil slope stability is equivalent to a variational problem of the functional of two-variant functions with a variable boundary in this paper. By applying the variational calculus, the differential equations (Euler's equations) and transversality conditions governing the critical sliding surface have been developed. The method given in the paper can be used to determine the sliding surface shape and the safety factor, and enables one to study width effects of the sliding collapse.

Keywords cohesive soil slope; stability; safety factor; sliding surface shape; the sliding collapse; width effects