第19卷 第3期 郑州工业大学学报 Vol.19 No.3
1998年 9 月 Journal of Zhengzhou University of Technology Sep. 1998

对分配问题求解方法的改进

赵 升
(郑州工业大学人事处)

摘 要 用匈牙利算法求解分配问题过程中,需要确定已变换后的系数矩阵中0元素的最大分配。目前0元素的最大分配是应用求网络最大流的方法求出的。提出了1种更为简便、快捷的方法即最小0元素消耗数方法来确定0元素的最大分配。

关键词 分配问题;匈牙利算法;改进
中图分类号 O29;T221.1

分配问题是1种特殊的线性规划问题,典型的分配问题为:

分配 n 个人去做 n 项工作,设 c_{ij} 为第 i 个人做第 j 项工作所花的时间,应当如何分配可使总的时间为最少。

设变量

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{表示第 } i \text{ 个人做第 } j \text{ 项工作}\\ 0 & \text{表示第 } i \text{ 个人不做第 } j \text{ 项工作}\end{cases} \qquad d$$

对以上问题,可列出下表1:

表1 时间分配表

人数	工作项数				
	1	2	…	n	合计
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	c_{n1} x_{n1}	c_{n2} x_{n2}	…	c_{nn} x_{nn}	1
合计	1	1	1	1	

上述分配问题的特点是每个人只能做1项工作,每项工作也只能有1个人来做。根据表1,可写出该分配问题的数学模型

$$\min\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij} \qquad i=1,2,\cdots,n$$

收稿日期:1997-09-04

第一作者 男 1964年6月生 硕士学位 讲师

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \qquad j=1,2,\cdots,n$$

$$x_{ij}=0 \text{ 或 } 1$$

对于以上的分配问题用线性规划的一般求解方法单纯形法求解是很困难的，一般用匈牙利方法求解。该法是通过变换 $c_{ij}'=c_{ij}-u_i-v_i$ 将系数矩阵[c_{ij}]变换为各行各列均含有 0 元素的非负矩阵[c_{ij}']

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \\ u_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 & v_2 & \qquad & v_n \end{matrix} \end{array}$$

如果在矩阵[c_{ij}']的各行各列确定 1 个并且只能确定 1 个 0 元素，令这些确定出来的 n 个 0 元素所在的位置对应的变量 x_{ij} 为 1，其余变量均为 0，所得到的方案就是最优分配方案。因此求最优分配方案的过程，就转化为在上述变换后系数矩阵中分配出 n 个 0 元素的过程。在实际求解过程中，经过 1 次变换可能分配不出 n 个 0 元素，此时需要对系数矩阵再进行 1 次变换，使未能分配出 0 元素的行列出现新的 0 元素以供分配。重复这样的矩阵变换和分配 0 元素的过程，直至分配出 n 个 0 元素，得到最优分配方案，在这个过程中，对于 1 个矩阵到底能分配出多少个 0 元素，即 0 元素的最大分配问题需要解决。

例如，下面经过变换后的矩阵虽然各行各列均含有 0 元素，但最多只能分配出 3 个 0 元素

$$\text{模型} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

确定最大分配方案的方法，目前主要是利用图论求最大流的方法。这种方法比较麻烦，本文就此问题提出 1 种很简便的方法。

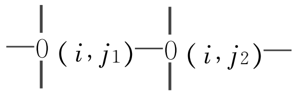
对于 1 个给定的矩阵，其中 0 元素的数目是一定的，这一定的 0 元素最多能分配出多少 0 元素来？当分配出 1 个 0 元素时，该 0 元素所在的行和列上其它 0 元素就无法再分配，失去了作用。也就是说，分配出该 0 元素要用去 0 元素的个数为：

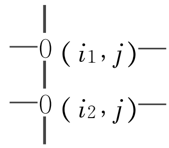
该 0 元素本身＋该 0 元素所在行上的其它 0 元素＋该 0 元素所在列上的其它 0 元素

称此数为该 0 元素的 0 消耗数。对于给定矩阵中的所有 0 元素，可以很容易地算出其 0 消耗数。根据动态规划的最优化原理，如果第 1 次分配出 0 消耗数最少的 0 元素，将消耗的 0 元素去掉，在余下的 0 元素中再分配 0 消耗最少的 0 元素，重复这样的过程，最终结果必将得到最多次数的分配即最大分配。这种求最大分配的方法称为最小 0 消耗数法。

在应用最小 0 消耗数法来确定最大分配时，会遇到 0 消耗数相同的 0 元素不止 1 个，此时应先分配哪 1 个 0 元素呢？我们可分以下几种情况来讨论：

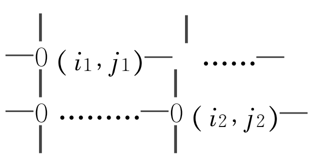
(1)0 消耗数相同，但 0 元素在同一行或同一列上，如下表示：

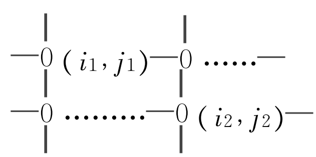




先就 0 元素在同一行的情况来说，如果分配 0 (i, j_1)，则 0 (i, j_2)被消耗掉；如果分配 0 (i, j_2)，则 0 (i, j_1)也被消耗掉，0 (i, j_1)和 0 (i, j_2)的 0 消耗实际上时相同的，只能表示 1 个分配，要么分配 0 (i, j_1)，要么分配 0 (i, j_2)，但是第 i 行则可以确定下来. 等其它 0 元素分配完毕之后，如 j_1、j_2 列中有一列确定，则第 i 行可以具体确定出 0 元素。如果 j_1、j_2 列仍未确定，则说明最大分配小于 n，或者有多种最优分配方案。对于同一列的情况，可以确定第 j 列，具体分配 0 (i_1, j) 还是 0 (i_2, j)，视其它 0 元素的分配而定。

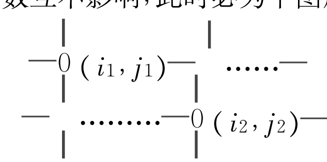
(2)0 消耗数相同且互相影响，但 0 元素不同行，不同列(同行同列即为情况(1))，此时 0 元素的消耗数必共同消耗 1 个或两个 0 元素，如下所示：





0 (i_1, j_1)、0 (i_2, j_2)的 0 消耗数相同，设为 q，它们的 0 消耗数因共有 0 元素而相互影响。如果先分配 0 (i_1, j_1)，则在余下的 0 元素中，0 (i_2, j_2)的 0 消耗数为 $q-1$ 或 $q-2$，必为最小，应予分配；如果先分配 0 (i_2, j_2)，在余下的 0 元素中也应先分配 0 (i_1, j_1)。因此这种情况可将 0 (i_1, j_1)与 0 (i_2, j_2)同时分配。

(3)0 消耗数相同但 0 消耗数互不影响，此时必为下图所示的情形：



此时如果先分配 0 (i_1, j_1)，则在余下的 0 元素中，0 (i_2, j_2)的 0 消耗必为最小，应予分配，同样如果先分配 0 (i_2, j_2)，则在余下的 0 元素中应先分配 0 (i_1, j_1)。因此这种情况可将 0 (i_1, j_1)与 0 (i_2, j_2)同时分配。

综合上述 3 种情况，当遇到 0 消耗数相同的 0 元素时，如果它们不在同一行、同一列上，可以将其同时分配；如果在同一行或同一列上，可将该行或该列分配，分配数加 1，具体分配视其余 0 元素分配结果而定。

现举例说明最小 0 消耗法。某一变换后的系数矩阵如下，试找出其最大分配。

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0* & 2 & 3 & 4 & 5 \\
4 & 6 & 0 & 0* & 0 & 4 \\
0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0* \\
0* & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 \\
1 & 2 & 0 & 3 & 0* & 2 \\
3 & 3 & 0* & 2 & 1 & 3
\end{bmatrix}
$$

首先计算各个 0 元素的 0 消耗数：

(1,1)4,(1,2)2,(2,3)6,(2,4)3,(2,5)5,(3,1)6,(3,3)7,(3,5)6,(3,6)4,(4,1)3,(5,3)5,(5,5)4,(6,3)4

0(1,2)的0消耗数为2,最小,将其分配掉,以*号标出。第1行、第2列已不起作用,在余下的0元素中,各个消耗数为:

(2,3)6,(2,4)3,(2,5)5,(3,1)5,(3,3)7,(3,5)6,(3,6)4,(4,1)2,(5,3)5,(5,5)4,(6,3)4

0(4,1)的消耗数为2,最小,将其分配掉。余下的0元素消耗数为:

(2,3)6,(2,4)3,(2,5)5,(3,3)6,(3,5)5,(3,6)3,(5,3)5,(5,5)4,(6,3)4

0(2,4),0(3,6)的0消耗数为3,且不同行、不同列,可以同时将其分配,余下的0元素的0消耗数为

(5,3)3,(5,5)2,(6,3)2

0(5,5),0(6,3)的0消耗数均为2,且不同行、不同列,同时将其分配掉.此时已无0元素,已找出最大分配,检查分配0元素的个数为6,与系数矩阵的阶数相同,故已得到最优方案。

用最小0消耗数法确定最大分配,简单方便,与目前已有的方法相比,提高了计算效率,并且这种方法的思路直观,其计算机处理程序也很容易编写。

参考文献

1 张建中,许绍吉.线性规划.北京:科学出版社,1990.80～95

2 运筹学试用教材编写组.运筹学.北京:清华大学出版社,1982.92～106

3 中国人民大学数学教研室.线性规划.北京:中国人民大学出版社,1981.25～40

4 S.P.Bradley.Applied methematical programming.Addison—Wesley Publishing Company,1977:62～75

5 R.Bellman.Dynamic programming.Princeton University Press,1957:31～40

Improvement in Solution to the Allocation Problem

Zhao Sheng

(*Zhengzhou University of Technology*)

Abstract In the solving process of the allocation problem with the Hungarian method, it is necessary to determine the maximum allocation of zero elements of the transformed coefficient matrix. The present way to determine the maximum allocation of zero elememts comes from the principle of maximum flow of network. In this paper, a superior method is presented to find the maximun allocation of zero elements. The method, called the Least Zero Consumption Method, is simple, practical, and efficient.

Keywords allocation problem; Hungarian method; improvement