第19卷 第3期 郑州工业大学学报 Vol.19 No.3
1998年 9 月 Journal of Zhengzhou University of Technology Sep. 1998

广义 Gauss－markoff 模型的相容性

冯密罗
(河南医科大学,郑州,450052)

摘　要　讨论了广义 Gauss－markoff 模型的相容性问题,即模型的无矛盾性、参数的自然约束和线性函数的可估性问题。这些都与协方差矩阵正定时的 Gauss－markoff 模型有较大的差别。通过讨论澄清了广义模型中相容性的概念。

关键词　Gauss－markoff 模型;相容性;协方差矩阵;无偏估计
中图分类号　O212

设$(Y_1, Y_2, \cdots Y_n)$是 n 个观测变量,使

$$a \quad \begin{cases} E(Y_1) = X_{i1}\beta_1 + X_{i2}\beta_2 + \cdots + X_{im}\beta_m \\ V(Y_i) = a^2 \qquad i = 1, 2, \cdots n \end{cases} \tag{1}$$

其中$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$和 a^2 为未知参数,$(X_{ij}=1, 2, \cdots, n; j=1, 2, \cdots, m)$为已知的系数。如果以 Y 和 β 记观测变量和参数构成的列向量,$X=(X_{ij})_{n\times m}$表示系数矩阵,则模型(1)可用矩阵表示如下:

$$\begin{cases} Y = X\beta + \varepsilon \\ E(\varepsilon) = 0, \qquad Dis(\varepsilon) = a^2 I \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\varepsilon=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)^2$ 为 n 维误差变量,$Dis(\varepsilon)$为 ε 的协方差矩阵,I 为 n 阶单位阵。由模型(2)可得:

$$\begin{cases} E(Y) = X\beta \\ Dis(Y) = a^2 I \end{cases} \tag{3}$$

而称有式(2)结构的模型为 Gauss－markoff 模型,简记为$(Y, X\beta, a^2 I)$。研究的目的是当观测变量有1组观测值 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 时,如何估计未知参数 β, a^2 以及 β 的任一已知线性函数$P'\beta$,其中 P 为一已知的列向量。如果考虑更一般些的情形,即 $Dis(Y)=a^2 G$,其中 G 为已知的 $n\times n$ 阶正定矩阵。此时称观测变量是相依的,这种情形可化为模型(2)。

当 $G>0$ 时,知对任意 $\beta\in R^m$, β 是可估的,即存在 β 的线性无偏估计

$$\hat{\beta} = (X'G^{-1}X)^{-}\cdot X'G^{-1}Y \tag{4}$$

且 $\hat{\beta}$是β的最小均方误差线性无偏估计(BLUE)。其中 A^-表示矩阵 A 的1个减号广义逆,即满足 $AA^-A=A$,又 $P'\beta$ 是β的任一性函数(P 为 m 维列向量),则 $P'\beta$ 可估的充分必要条件为$P\in\mu(X')=\mu(X'X)\Leftrightarrow L'Y$ 是$P'\beta$的无偏估计 · 且 $X'L=P$。其中 $\mu(A)$表示由

收稿日期:1997－12－15
第一作者　女　1963年7月生　学士学位　讲师

A 的列向量张成的线性空间，当 $P'\beta$ 可估时，$P'\beta$ 的 BLUE 为 $P'\hat{\beta}$，$\hat{\beta}$ 由式(4)确定，又设 $H\beta=w$ 为参数的约束，其中 H 为已知 $k\times m$ 矩阵，w 为已知的 k 维列向量，则知当此约束相容(即 $w\in\mu(H)$)时，$P'\beta$ 可估计的充分必要条件为 $P\in\mu(X'|H')$。

然而当 $|G|=0$ 时，以上问题将变得复杂起来，这是因为此时模型(2)中的参数 β 是受到自然约束的，当模型有如下结构

$$\begin{cases} Y=X\beta+\varepsilon \\ \mathrm{Y}Dis(Y)=a^2G \qquad G\geqslant 0\end{cases}$$

时，称其为广义 Gauss－markoff 模型，简记为$(Y, X\beta, a^2G)$。当模型不存在明显矛盾时，称模型是相容的。下面就 β 的自然约束 $P'\beta$ 的可估性以及线性约束 $H\beta=W$ 的无矛盾性等，讨论广义模型的相容性问题。

(1)模型的一致性，即 $Y\in\mu(G|X)$。

当 $G>0$ 时，$\mu(G)=R^n$，$Y\in\mu(G)$ 自然成立，然而当 $|G|=0$ 时，则有 $Y\in\mu(G|X)$。设 $\alpha\in R^n$，使得 $\alpha'X=0$，$\alpha'G=0$，则 $E(\alpha'y)=\alpha'X\beta=0$，$E(\alpha'Y)^2=a^2\alpha'G\alpha=0$，故有 $\alpha'Y=0$，则 $Y\in\mu(G|X)$。

(2) β 的自然约束，即 $Y-X\beta\in\mu(G)$或者存在非零矩阵 H，使得 $HX\beta=0$。

当 $G>0$ 时，$Y-X\beta\in\mu(G)$是自然的。当 $|G|=0$ 时，设有非零向量 α 致使 $\alpha'G=0$。则有 $E(\alpha'(Y-X\beta))^2=a^2\alpha'G\alpha=0$，故知 $Y-X\beta\in\mu(G)$。这是对 β 的一种自然约束，因 $|G|=0$，故知存在非零矩阵 H 致使 $HY=0$，$a\cdot e$，因而亦有 $HX\beta=0$，这是对 β 的一种约束。因而当 $|G|=0$ 时，模型带有自然约束。

(3)设 $P'\beta$ 是 β 的任一线性函数，则 $P'\beta$ 可估的充要条件是 $P\in\mu(X')$。

当 $G>0$ 时，知 $P'\beta$ 可估的充要条件是 $P\in\mu(X')$。此时，若 $L'Y$ 是 $P'\beta$ 的无偏估计，则必有 $X'L=P$。然而，当 $|G|=0$ 时，仍有“$P'\beta$ 可估的充要条件是 $P\in\mu(X')$”。但是，若 $L'Y$ 是 $P'\beta$ 的 1 个无偏估计，则不必有 $X'L=P$。此时，有 $L'X\beta=P'\beta$，$HX\beta=0$，故知存在非零向量 λ，致使

$$X'(L+H'\lambda)=P \tag{6}$$

其中 H 为使 $HY=0$，$a\cdot e$ 的最大秩矩阵。然而，设 $L'Y$ 是 $P'\beta$ 的无偏估计，则存在 M，使 $M'Y=L'Y$，且 $X'M=P$。

当模型相容时，设 $P'\beta$ 可估，则 $P'\hat{\beta}$为其 BLUE，其中

$$\beta=(X'G^{-1}X)^{-}\cdot X'G^{-1}Y=L'Y \tag{7}$$

$\hat{\beta}$使 $V(L'Y)$达到最小的 β。如果求 $P'\beta$ 的线性无偏估计致使

$$(Y-X\beta)'M(Y-X\beta) \tag{8}$$

达到最小 · 其中 M 为非负定矩阵，则取 $M=(G+XUX')^{-}$；U 为任一对称矩阵，使 $R(G|X)=R(G+XUX')$。则有

$$\hat{\beta}=(X'MX)^{-}\cdot X'MY \tag{9}$$

其中 $M=(G+XUX')^{-}$，且 $P'\beta$ 的 BLUE 为

$$P'\hat{\beta}=L'X(X'MX)^{-}X'MY \tag{10}$$

其中 L 使 $P=X'L$

由 H 的定义，易得 $HG=0$，于是由式(7)，(9)确定的 $\hat{\beta}$ 均满足自然约束 $HX\hat{\beta}=0$　$a\cdot e$

(4)设 $Ho:P'\beta=w$ 为关于 β 的 1 个零假设，其中 P 为 $k\times m$ 矩阵，w 为 K 维向量。则 $Ho:P'\beta=W$ 相容的充分必要条件是 $DD^{-}u=u$. 其中 $u=P'\hat{\beta}-w$，$P'\hat{\beta}$ 是一组参数的线性函数的 BLUE。

$$D=P'(X'G^{-}X)^{-}P \tag{11}$$

$\hat{\beta}$ 由式(7)给定。

若 $Ho:P'\beta=w$ 是关于 β 的 1 个零假设，当 $G>0$ 时，只要 $W\in\mu(P')$，上述假设便无明显矛盾。然而，当 $|G|=0$ 时，除 $w\in\mu(P')$ 外，Ho 还应保持如前所述的一致性，已知 $P'\hat{\beta}$（$\hat{\beta}$ 如(7)式)是 $P'\beta$ 的无偏估计，记 $Dix(P'\hat{\beta})=a^2D$，D 如式(11)，则有："$Ho:P'\beta=w$ 是相容的"$\Leftrightarrow P'\hat{\beta}-w\in\mu(\mathrm{D})\Leftrightarrow DD^{-}u=u$，$u=P'\hat{\beta}-w$。

参考文献

1 Rao, C. R. Linear Statistical Inference and Its Applications. Sed, Ed. John Wiley and Sons, 1973: 85～95

2 陈希儒. 数理统计引论. 北京: 科学出版社, 1981. 92～106

Compatibility of Gauss—markoff Model in Broad Sense

Feng Miluo

(*Henan Medicine University*)

Abstract The problems on the compatibility of the Gauss—markoff model in broad sense are discussd, and the concept of compatibility of the model in broad sense is clarified.

Keywords Gauss—markoff model; compatibility; covariance matrix; unbiased estimator