文章编号：1007－6492(1999)01－0015－04

非线性常微分方程的迭代算法

何吉欢

(上海大学，上海市应用数学和力学研究所，上海 200072)

摘　要：提出了求解非线性微分方程的一种变分迭代算法，这种方法不受小参数的影响．对于线性方程，应用该方法只需迭代一次即可得到其精确解；而对于非线性方程，由于拉氏乘子只能近似识别，因此只能通过不断迭代才能得到问题的一致有效的近似解．

关键词：非线性方程；变分迭代算法；摄动理论

中图分类号：O 157　　　**文献标识码**：A

0　引言

本文将研究非线性方程初值问题

$$\begin{cases} u' + f(t, u, \varepsilon) = 0, \\ u(0) = C(\varepsilon). \end{cases} \tag{1}$$

式中：C 为已知常数，对于小参数 ε，可应用传统的摄动方法求解，但一般很难得到对于 $0<\varepsilon<\infty$ 内一直有效的近似解．

作者在广义拉氏乘子法[1]的基础上提出了一种新的迭算法——变分迭代算法(Variational Iteration Method)[2~5]，本文将应用这种方法来求解问题(1)．

1　变分迭代算法

设 u_n 为问题(1)的第 n 次近似解，显然这时

$$u_n' + f(t, u_n, \varepsilon) \neq 0, \tag{2}$$

用下式来校正其近似值：

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \left\{ \frac{\mathrm{d} u_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau} + f[\tau, u_n(\tau), \varepsilon] \right\} \mathrm{d}\tau. \tag{3}$$

上式右边第 2 项为校正项(Correction)，称上式为校正泛函(Correction Functional)；u_0 为问题的初值，可含待定常数；λ 为广义拉氏乘子．寻求这样的拉氏乘子，使 u_{n+1} 比 u_n 具有更高的精度．设

$$u_n = u_{ex} + \delta u_n, \tag{4}$$

式中：u_{ex} 为问题的精确解；δu_n 为一小量，把式(4)代入式(3)得

$$u_{n+1}(t) = u_{ex} + \delta u_n + \int_0^t \lambda \left\{ \frac{\mathrm{d}(u_{ex} + \delta u_n)}{\mathrm{d}\tau} + f[\tau, (u_{ex} + \delta u_n), \varepsilon] \right\} \mathrm{d}\tau, \tag{5}$$

把 f 展开：

$$f[\tau, (u_{ex} + \delta u_n), \varepsilon] = f(\tau, u_{ex}, \varepsilon) + \frac{\partial f(\tau, u_{ex}, \varepsilon)}{\partial u} \delta u_n + O(\delta u_n)^2, \tag{6}$$

把式(6)代入式(5)，并分部积分可得

$$u_{n+1}(t) = u_{ex} + \delta u_n + \lambda|_{\tau=t} \delta u_n + \int_0^t \left\{ -\frac{\mathrm{d}\lambda(\tau)}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial f(\tau, u_{ex}, \varepsilon)}{\partial u} \lambda \right\} \delta u_n \mathrm{d}\tau + O(\delta u_n)^2. \tag{7}$$

如果令

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau} + \dfrac{\partial f(\tau, u_{ex}, \varepsilon)}{\partial u} \lambda = 0, \\ 1 + \lambda|_{\tau=t} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

则由式(7)可得

$$u_{n+1} = u_{ex} + O(\delta u_n)^2. \tag{9}$$

比较式(9)和式(4)，可以看出 u_{n+1} 比 u_n 具有更高的精度．为了方便地识别拉氏乘子，式(8)可近似写成

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau} + \dfrac{\partial f(\tau, u_n, \varepsilon)}{\partial u} \lambda = 0, \\ 1 + \lambda|_{\tau=t} = 0. \end{cases} \tag{10}$$

其实式(10)可用变分的概念直接得到，令校正泛

收稿日期：1998－06－19；**修订日期**：1998－10－06
基金项目：上海市高等学校青年科学基金资助项目(98QN47)
作者简介：何吉欢(1965—)，男，浙江省诸暨县人，上海大学讲师，博士，主要从事流体力学变分原理及非线性分析方面的研究．

函(3)取驻值,注意到 $\delta u_n(0)=0$,可得

$$\delta u_{n+1}(t)=\delta u_n(t)+$$
$$\delta\int_0^t \lambda\left\{\frac{d u_n(\tau)}{d\tau}+f[\tau,u_n(\tau)]\right\}d\tau=$$
$$\delta u_n(t)+\lambda|_{\tau=t}\,\delta u_n+$$
$$\int_0^t\left\{-\lambda'+\frac{\partial f}{\partial u}\lambda\right\}\delta u_n(\tau)d\tau=0. \tag{11}$$

由式(11)即可得驻值条件式(10).由式(10)即可识别拉氏乘子,把识别了的拉氏乘子代入校正泛函式(3),即得所需的迭代公式.

2 几个例子

对于线性问题,应用变分迭代算法只需迭代一次即可得到精确解,如

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}+u-\exp(-t)=0,\\ u(0)=1,\end{cases} \tag{12}$$

其校正泛函可表示为

$$u_{n+1}(t)=u_n(t)+$$
$$\int_0^t\lambda\left\{\frac{d u_n(\tau)}{d\tau}+u_n(\tau)-\exp(-\tau)\right\}d\tau. \tag{13}$$

令上述校正泛函取驻值,得以下驻值条件

$$\begin{cases}-\dfrac{d\lambda}{d\tau}+\lambda=0,\\ 1+\lambda|_{\tau=t}=0,\end{cases} \tag{14}$$

即可识别拉氏乘子:

$$\lambda=-\exp(\tau-t) \tag{15}$$

于是可得以下迭代公式

$$u_{n+1}(t)=u_n(t)-$$
$$\int_0^t\exp(\tau-t)\left\{\frac{d u_n(\tau)}{d\tau}+u_n(\tau)-\exp(-\tau)\right\}d\tau. \tag{16}$$

选齐次方程的解作为初始近似:

$$u_0(t)=\exp(-t), \tag{17}$$

应用变分迭代公式(16),可得

$$u_1(t)=\exp(-t)-$$
$$\int_0^t\exp(\tau-t)\{-\exp(-\tau)\}d\tau=$$
$$\exp(-t)+\int_0^t\exp(-t)d\tau=$$
$$\exp(-t)+\tau\exp(-t)|_0^t=$$
$$\exp(-t)+t\exp(-t). \tag{18}$$

这就是精确解.

由于拉氏乘子近似识别,所以只有通过迭代的方法才能逼近非线性问题的真解.

例 2

$$\begin{cases}y'+2ty^2=0,\\ y(0)=1,\end{cases} \tag{19}$$

其校正泛函可表示为

$$y_{n+1}(t)=y_n(t)+\int_0^t\lambda\{y_n'(\tau)+2\tau y_n^2\}d\tau. \tag{20}$$

令上述校正泛函取驻值,可得以下驻值条件

$$\begin{cases}-\lambda'(\tau)+4\tau y_n(\tau)\lambda(\tau)=0,\\ 1+\lambda(\tau)|_{\tau=t}=0,\end{cases} \tag{21}$$

于是可识别拉氏乘子得

$$\lambda=-\exp\left\{\int_t^\tau 4xy_n(x)dx\right\} \tag{22}$$

选初始近似为

$$y_0(t)=1, \tag{23}$$

于是可得

$$\lambda=-\exp\left\{\int_t^\tau 4x\,dx\right\}=$$

则由

$$-\exp\{2(\tau^2-t^2)\}. \tag{24}$$

再代入式(20)得一阶近似

$$y_1(t)=1-\int_0^t\exp\{2(\tau^2-t^2)\}\{2\tau\}d\tau=$$
$$1-\frac{1}{2}[1-\exp(-2t^2)], \tag{25}$$

而其精确解为

$$y_{ex}(t)=\frac{1}{1+t^2}. \tag{26}$$

把式(25)展开

$$y_1(t)=1-t^2+t^4+O(t^6). \tag{27}$$

可见一阶近似已具有相当精度.

有时为了识别拉氏乘子的方便,可以应用变分理论[6,7]中的限制变分的概念,把校正泛函式(20)重写成

$$y_{n+1}(t)=y_n(t)+\int_0^t\lambda\{y_n'(\tau)+2\tau\tilde{y}_n^2\}d\tau. \tag{28}$$

式中 $\tilde{y}_n$ 为限制变分量[6],即 $\delta\tilde{y}_n=0$,这样其驻值条件变成

$$\begin{cases}-\lambda'(\tau)=0,\\ 1+\lambda(\tau)|_{\tau=t}=0,\end{cases} \tag{29}$$

于是可以方便地识别拉氏乘子:$\lambda=-1$,从而可得以下迭代公式

$$y_{n+1}(t)=y_n(t)-\int_0^t\{y_n'(\tau)+2\tau y_n^2(\tau)\}d\tau. \tag{30}$$

选其初值作为其初始近似 $y_0(t)=1$,由式(30)可连续得到

$$y_1(t)=1-\int_0^t\{2\tau\}d\tau=1-t^2,$$

$$y_2(t) = 1 - t^2 - \int_0^t \{-2\tau + 2\tau(1-\tau^2)^2(\tau)\} d\tau = 1 - t^2 + t^4 - \frac{1}{3}t^6,$$

当 $n\to\infty$ 时，近似解趋向于真解：

$$\lim_{n\to\infty} y_n(t) = \frac{1}{1+t^2}. \tag{31}$$

例 3

$$\begin{cases} y' - 2y - y^2 = 0, \\ y(0) = -2 + 5\varepsilon \end{cases} \tag{32}$$

其校正泛函可表示为

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \lambda\{y_n'(\tau) - 2y_n(\tau) - y_n^2(\tau)\} d\tau. \tag{33}$$

令上述校正泛函取驻值，可得以下驻值条件

$$\begin{cases} -\lambda'(\tau) - (2+2y_n)\lambda(\tau) = 0, \\ 1+\lambda(\tau)|_{\tau=t} = 0. \end{cases} \tag{34}$$

通过上式可以识别拉氏乘子，选初始近似为

$$y_0(t) = -2 + 5\varepsilon, \tag{35}$$

代入式(34)，即可识别拉氏乘子

$$\lambda = -\exp\{(2-10\varepsilon)(\tau - t)\} \tag{36}$$

把识别的拉氏乘子代入式(33)，可得以下一阶近似

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -2 + 5\varepsilon - \int_0^t \exp\{(2-10\varepsilon)(\tau - t)\} \times \\ &\quad \{-2(-2+5\varepsilon) - (-2+5\varepsilon)^2\} d\tau = \\ &\quad -2 + 5\varepsilon - \frac{10\varepsilon - 25\varepsilon^2}{2-10\varepsilon} \times \\ &\quad [1 - \exp\{-(2-10\varepsilon)t\}]. \end{aligned} \tag{37}$$

如用摄动法[8]可得到以下结果：

$$y(t) = -2 + 5\varepsilon\exp(-2t) + O(\varepsilon^2) \tag{38}$$

式(38)只对小的 ε 才有效，而式(37)却没有这个限制!

3　一般情形

对于一般情形，设

$$L(t,u,\varepsilon) + N(t,u,\varepsilon) = 0 \tag{39}$$

其中：L 为线性微分算子；N 为非线性项.

其校正泛函可表示为

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda\{L[\tau, u_n(\tau), \varepsilon] + N[\tau, u_n(\tau), \varepsilon]\} d\tau. \tag{40}$$

在识别拉氏乘子时，非线性项可看成是限制变分量，也可以把它“线性化”. 这里举一单摆运动方程为例

$$\begin{aligned} &\theta'' + \omega^2\sin\theta = 0, \\ &\theta(0) = \alpha, \\ &\theta'(0) = 0, \end{aligned} \tag{41}$$

其校正泛函可表示为

$$\theta_{n+1}(t) = \theta_n(t) + \int_0^t \lambda\left\{\frac{d^2\theta_n(\tau)}{d\tau^2} + \omega^2\sin\theta_n(\tau)\right\} d\tau, \tag{42}$$

把非线性项“线性化”

$$\sin\theta = \theta + O(\theta^3), \tag{43}$$

于是式(42)可写成

$$\theta_{n+1}(t) = \theta_n(t) + \int_0^t \lambda\left[\frac{d^2\theta_n(\tau)}{d\tau^2} + \omega^2\theta_n(\tau) + O(\theta_n)^2\right] d\tau. \tag{44}$$

令上述校正泛函取驻值可得以下驻值条件：

$$\begin{cases} \lambda''(\tau) + \omega^2\lambda(\tau) = 0, \\ \lambda(\tau)|_{\tau=t} = 0, \\ 1 - \lambda'(\tau)|_{\tau=t} = 0, \end{cases} \tag{45}$$

于是可识别拉氏乘子得

$$\lambda = \frac{1}{\omega}\sin\omega(\tau - t), \tag{46}$$

从而可得以下迭代公式

$$\theta_{n+1}(t) = \theta_n(t) + \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(\tau - t) \times \left[\frac{d^2\theta_n(\tau)}{d\tau^2} + \omega^2\sin\theta_n(\tau)\right] d\tau. \tag{47}$$

设初始近似为

$$\theta_0(t) = \alpha\cos\alpha\omega t, \tag{48}$$

应用变分迭代公式(47)，可得

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &\cong \theta_0(t) + \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(\tau - t) \times \\ &\left[\alpha(-\alpha^2\omega^2 + \omega^2)\cos\alpha\omega\tau - \frac{\omega^2\alpha^3}{6}\cos^3\alpha\omega\tau\right] d\tau = \\ &\theta_0(t) + \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(\tau - t) \times \\ &\left[\alpha\omega^2\left(\alpha^2 + 1 - \frac{\alpha^2}{8}\right)\cos\alpha\omega\tau - \frac{\omega^2\alpha^3}{24}\cos 3\alpha\omega\tau\right] d\tau. \end{aligned} \tag{49}$$

式中：α 是待定常数，它可用变分直接方法如最小二乘法、配置法或 Galerkin 法来确定. 为使上述方程更简便，把 $\cos\alpha\omega\tau$ 的系数置零：

$$-\alpha^2 + 1 - \frac{\alpha^2}{8} = 0. \tag{50}$$

于是由式(49)可得

$$\theta_1(t) = \alpha\cos\alpha\omega t - \frac{\alpha^3}{24(9\alpha^2 - 1)}(\cos 3\omega t - \cos\omega t). \tag{51}$$

式中，$\alpha=\sqrt{1-\alpha^2/8}$

而通过摄动法得到的结果为[8]：

$$\theta(t)=\alpha\cos((1-\alpha^2)/16)\varphi. \qquad (52)$$

很显然式(51)比式(52)具有更高的精度.

4 结论

初步给出了求解非线性方程的一种变分迭代算法.这种方法可以方便地推广到求解非线性偏微分方程.

参考文献

[1] INOKUTI M, SEKINE, MURU T. General ueneral use of the lagrange multiplier in nonlinear mathematical physics[A]. NEMAT-NASSER S. Variational Method in The Mechanics of Solids[C], London: Pergamon Press, 1978, 156－162.

[2] HE J H. A New approach to nonlinear partial differential equations[J]. Communications in Nonlinear Sciences & Numerical Simulation, 1997, 2(4): 230－235.

[3] HE J H. Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porors media[J]. Computer Methods in Applied Mech & Engineering, 1998, 161: 67－73.

[4] HE J H. Variational iteration method, a kind of nonlinear analytical technique[J]. Int J Nonlinear Nech, 1998, 34(4): 699－708.

[5] 何吉欢. 非线性问题的变分近似估算方法及其应用[J]. 力学与实践, 1998, 20(1): 30－32.

[6] FINLAYSON B S A. The Method of Weighted Rdsiduals and Variational Principles[M]. London: Acad Press, 1972.

[7] HE J H. A variational theory for 1－D unsteady compressible flow[J]. Applied Mathematical Mathematical Modelling, 1998, 22(6): 395－403.

[8] NAYFEH A H. Problems in Perturbation[M]. New York: John Wiley & Sons, 1985. 89－90.

Iteration Approach to Nonlinear Ordinary Differential Equations

HE Ji－huan

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

Abstract: In the paper, a new method called the variational iteration method, which does not depend upon small parameters, is proposed to solve the nonlinear ordinary differential equations. With this new method their exact solutions can be conveniently obtained by only one iteration for linear problems; while for nonlinear problems, due to approximate identification for multiplier, their uniform approximations can be readily obtained by iteration.

Key words: nonlinearity; varitional iteration method; perturbation theory

---