

文章编号: 1007-6492(1999) 01-0069-03

分解法求解非线性阻尼振动

刘保良

(郑州工业大学数理力学系, 河南 郑州 450002)

摘 要: 介绍一种目前在国际上较活跃的求解非线性复杂问题的方法——分解法, 并将此法应用于非线性阻尼振动, 求出了振动方程的解析解, 据此, 给出了非线性阻尼振动规律及位移与速度的关系. 该方法有很大的普遍性, 特别是对于复杂问题的定量计算, 有一定的应用和发展前景.

关键词: 分解法; 阻尼振动; 相图

中图分类号: O 321 **文献标识码:** A

1 分解法概述

在非线性力学中, 经常遇到非线性系统及参数中的随机性两方面的难题, 通常是不得不把非线性系统进行数学上简化及物理上的限制, 诸如线性化、微扰、白噪声、准色性等等假设, 采用链截断、封闭等处理步骤. 分解法则不必有上述假设和近似条件, 它能够处理微分方程中具有随机过程的系数以及初值条件中的随机性, 以及输入的随机性和强迫情形, 并且不必做大量的计算机计算, 最后得到的是解析解, 但不必是封闭形式的解.

一般的动力学方程可以表示为

$$Fu = g(t). \quad (1)$$

式中: F 代表非线性算符, 它可分解为线性和非线性部分, 即 $F = L + R + N$; L 代表方程中最高阶求导的线性可逆算子; R 为其余的线性算子; N 代表非线性部分; $g(t)$ 代表方程的非齐次部分或随机过程.

于是, 方程可写成

$$Lu + Ru + Nu = g(t),$$

假设存在逆算符 L^{-1} , 则方程

$$Lu = g(t) - Ru - Nu,$$

用 L^{-1} 作用两边, 得等式

$$u = L^{-1}g(t) - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu. \quad (2)$$

对于初值问题, 则 L^{-1} 表示积分算符从 0 到 t 的积分, 若 $L = \frac{d}{dt}$, 则 L^{-1} 为 γ 重积分算符.

美国数学物理学家 G. Adomian 提出的逆算

方法, 除了上述算符分解求逆之外, 必须把方程的解分解为无穷个分量之和^[1], 即

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

并且关键性的一步是把方程中的非线性函数 Nu 用下列 Adomian 多项式来等价:

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n.$$

这就是说如何产生 Adomian 多项式是分解法的一个重要技术. 为方便分组, 引进一参数 λ , 使级数参数化

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda^n, \quad Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \lambda^n. \quad (3)$$

方程 (2) 可写成

$$u = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu. \quad (4)$$

将式 (3) 代入式 (4), 比较 λ 的相同幂次项得

$$u_0 = \Psi_0 + L^{-1}g,$$

$$u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0,$$

$$u_n = -L^{-1}Ru_{n-1} - L^{-1}A_{n-1}. \quad (5)$$

其中, Ψ_0 满足 $L\Psi_0 = 0$ 及初值条件. 由此可见, 根据初值条件, u_0 就不难求出, 则 u_1, u_2 等从式 (5) 可以依次类推推出链, 这样就得到了非线性方程 (1) 的逼近解

$$\varphi = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n. \quad (6)$$

只要 n 足够大, $\varphi - u \rightarrow 0$, 即逆算符方法是收敛的, 这已由 Cherruault 等人所证明^[2]. 下面是关于 Adomian 多项式的如何确定. 现有文献中已提

收稿日期: 1998-06-30; 修订日期: 1998-10-30

基金项目: 河南省自然科学基金资助项目(954041700)

作者简介: 刘保良(1961-), 男, 河南省焦作市人, 郑州工业大学讲师, 主要从事非线性物理及振动方面的研究.

供几种方法^[3], 在这里只介绍一种较直观的方法. 使我们能了解到具体的过程, 对于非线性函数为幂次多项式 $Nu = u^m$ 时, 可以方便地写成参数化表示

$$Nu = u^m = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n.$$

用文献^[3]的方法, 可得

$$A_0 = u_0^m,$$
$$A_1 = m(u_1/u_0) A_0 = mu_0^{m-1} u_1,$$
$$2A_2 = (m-1)(u_1/u_0) A_1 + 2m(u_2/u_0) A_0 =$$
$$m(m-1)u_0^{m-2} u_1^2 + 2mu_2 u_0^{m-1},$$
$$\dots\dots$$
$$nA_n = [m-(n-1)](u_1/u_0) A_{n-1} +$$
$$[2m-(n-2)](u_2/u_0) A_{n-2} +$$
$$[3m-(n-3)](u_3/u_0) A_{n-3} + \dots + nm(u_n/u_0) A_0 \quad (9)$$

2 非线性阻尼方程的解

在振子的振动过程中, 常常受到阻力的作用, 阻力的方向总与速度方向相反, 其大小也与速度有关, 并且呈复杂的非线性关系, 在一定条件下 (如低雷诺数下的流体阻力) $f = -kv$, 这样的阻尼在《大学物理》中都作过详细的讨论. 若阻力是速率高阶函数 $f = -\frac{\beta}{2}v^2$, 其中 β 为阻尼常数, 则得非线性阻尼运动方程

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{2}\dot{x}^2 + w_0^2 x = 0. \quad (8)$$

为方便计算将方程降阶, 令 $\dot{x} = y$ 得方程

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\frac{\beta}{2}y^2 - w_0^2 x. \end{cases}$$

上式中第二个方程中的非线性项 y^2 为幂函数, 由式 (7) 可求出 $Ny = y^2$, 即 $m=2$ 时的 Adomian 多项式

$$\begin{cases} A_0 = y_0^2, \\ A_1 = 2y_1 y_0, \\ A_2 = 2y_2 y_0 + y_1^2, \\ A_3 = 2y_3 y_0 + 2y_2 y_1, \\ A_4 = 2y_4 y_0 + 2y_3 y_1 + y_2^2, \\ \dots\dots \end{cases} \quad (10)$$

取 $L = \frac{d}{dt}$, 则 L^{-1} 即为积分算符, 再由式 (5) 可依次求出 x, y 的逼近解 φ_1, φ_2

$$\varphi_1 = \sum x_n t^n, \quad \varphi_2 = \sum y_n t^n.$$

这是个耗散的非线性振动系统, 它对初值富有很高的敏感性, 在这里采取 $x_0=0.04, y_0=0.6, w_0=10$ 及 $\beta=2$ 的无量纲处理, 得 6 阶解析解, 而在实际应用时可得到更高阶解析解.

$$x_1 = y_0, \quad y_1 = -(w_0 x_0 + y_0^2);$$
$$x_2 = y_1/2, \quad y_2 = -(w_0 x_1 + 2y_1 y_0)/2;$$
$$x_3 = y_2/3, \quad y_3 = -(w_0 x_2 + 2y_2 y_0 + y_1^2)/3;$$
$$x_4 = y_3/4, \quad y_4 = -(w_0 x_3 + 2y_3 y_0 + 2y_2 y_1)/4;$$
$$x_5 = y_4/5,$$
$$y_5 = -(w_0 x_4 + 2y_4 y_0 + 2y_3 y_1 + y_2^2)/5;$$
$$x_6 = y_5/6,$$
$$y_6 = -(w_0 x_5 + 2y_5 y_0 + 2y_4 y_1 + 2y_3 y_2)/6;$$
$$\varphi_1 = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + x_3 t^3 + x_4 t^4 + x_5 t^5 + x_6 t^6;$$
$$\varphi_2 = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + y_3 t^3 + y_4 t^4 + y_5 t^5 + y_6 t^6.$$

φ_1, φ_2 分别为 x (位移), y (速度) 的逼近解, 并选取 $t \in [0, 1.2735]$, 绘出振动曲线 $x \sim t$ (图 1) 和振动的相图 $x \sim y$ (图 2).

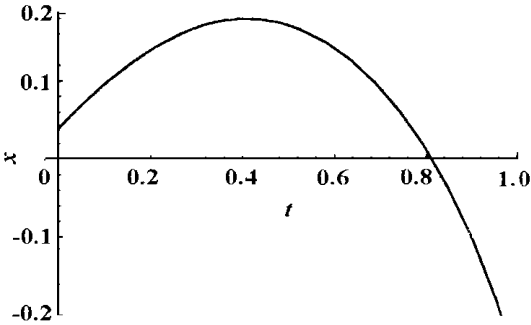


图 1 $x \sim t$ 曲线

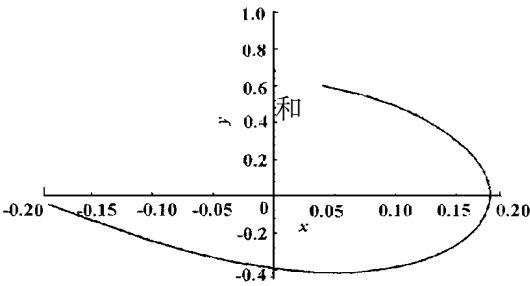


图 2 $x \sim y$ 相图

这只是介绍一种求解非线性系统的方法. 分解放自 80 年代发展起来, 由于它具有更高的精度和更快的收敛性, 以及较易实现的数学机械化方法, 使它已广泛地应用于非线性确定论和随机论的问题, 对于混沌行为的研究和控制也有应用前景.

参考文献

[1] ADO MI AN G .Stochastic System[M] . New York :Academic press ,1983
[2] 方锦清 . 分解法及其应用[J] . 自然杂志 ,1992, 15

(10) :753~758

[3] 方锦清 . 逆算符理论方法及其在非线形物理中的应用[J] . 物理进展 ,1993, 13(4) :454~472
[4] 方锦清, 姚伟光 . 逆算方法求解非线性动力学方程及其一些应用实例[J] . 物理学报, 1993, 42(9) :1375~1384

Solving the Non -linear Equation for the Damped
Vibration by the Resolution Method

LI U Bao -liang

(Department of Mathematics ,Physics and Mechanics ,Zhengzhou University of Technology ,Zhengzhou 450002,China)

Abstract :This paper introduces a solution for the non -linear complicated physics problems , applied it to the non -linear equation for the damped vibration , and deduced the solution of the vibration and the phase diagram .By means of this method ,we study nonlinear damped oscillation and obtain the relation between the velocity and displacement for nonlinear damped oscillation .So the method is of potential application valuable in nonlinear physics and many other fields .

Key words resolution method ; damped oscillation ; phase diagram

(上接 28 页)

参考文献

[1] 仲增墉 . 我国金属间化合物高温结构材料研究的进展[A] . 仲增墉, 叶恒强 . 金属间化合物——全国首届高温结构金属间化合物学术讨论会论文集[C] . 北京 :机械工业出版社, 1992. 1—9.
[2] 沈宁福, 汤亚力, 关绍康 . 凝固理论进展与快速凝固[J] . 金属学报, 1996, 32(7) :673—684.
[3] 杨文英, 章守华, 吕反修 . 急冷凝固 Ni₃Al 合金中的亚稳相[A] . 李建国 . 第三届中国青年材料科学研讨会论文集(上)[C] . 西安 :西北工业大学, 1991. 130—132.
[4] 程天一, 章守华 . 快速凝固技术与新型合金[M] . 北京 :宇航出版社, 1990. 125—156.

[5] 巴瑞特 C S, 马萨尔斯基 T B . 金属的结构[M] . 陶琨译 . 北京 :机械工业出版社, 1987. 194—219.
[6] 周公度 . 晶体结构测定[M] . 北京 :科学出版社, 1981. 301—302.
[7] 郭常霖, 姚公达 . 通用无标样 X 射线衍射定量相分析的新方法[J] . 物理学报, 1985, 34(11) :1451—1459.
[8] SHAO G, TSAKI ROPOULOS P, MI ODOWNIK A P . Role of nucleation in phase competition in binary Ti -Al alloys[J] . Mater Sci Tech , 1997, 13(7) :1—9.
[9] BARTH M, WEI B, HERLACH D M et al . Rapid solidification of undercooled nickel -aluminium melts[J] . Materials Science and Engineering , 1994, 78(1) :305—307.

Phase Structure in Ni -Al Alloys Under Different Solidification Conditions

LI Jian -qiang , SHEN Ning -fu , TANG Ya -li

(Department of Materials Science and Engineering ,Zhengzhou University of Technology , Zhengzhou 450002,China)

Abstract :The phase structures of Ni₇₀Al₃₀, Ni₇₅Al₂₅, Ni₈₀Al₂₀ alloys solidified under different solidification conditions were studied and quantitatively analysed using XRD . Martensite transformation of β -Ni₃Al phase and pre -martensite effect were observed by means of TEM . The formation of β -Ni₃Al phase could be restrained by rapid solidification . The mechanism leading to this effect was discussed with the current theory of crystal nucleation and growth .

Key words rapid solidification ; Ni₃Al ; phase competition ; martensite transformation