

文章编号:1007-6492(1999)04-0006-04

## 薄拱坝静力分析的样条半解析法

王复明<sup>1</sup>, 冯红建<sup>2</sup>, 周鸿钧<sup>1</sup>

(1. 郑州工业大学水利与环境工程学院, 河南 郑州 450002; 2. 河南省建筑安装总公司, 河南 郑州 450002)

**摘 要:** 针对拱坝静力分析的有限元法计算复杂, 且存在解决坝型选优问题时精度不高等缺点, 以壳体理论和能量原理为基础, 提出了薄拱坝静力分析的样条半解析法, 它吸收了样条函数方法的一般优点, 避免了有限元方法中计算繁琐的不足, 且能满足精度要求, 给出了计算实例, 并与有限元法和拱梁模态法的结果进行了对比。

**关键词:** 薄拱坝; 静力分析; 样条半解析法; 有限单元法

**中图分类号:** TV 642.3

**文献标识码:** A

### 0 引言

拱坝作为一种既经济又安全的坝型, 在水利水电工程中被广泛采用。然而, 对于拱坝这种形状比较复杂的结构进行应力分析, 却非常困难, 试图寻求解析解证明是无意义的。较多采用的有限单元法所计算的结果虽然与试验结果比较一致, 但该法的计算工作量及所需计算机容量都比较大, 因此, 对于设计中的坝型选优问题, 给多种方案的对比计算带来较大的困难。对普通单位来说, 常因资金不足或因计算机容量有限, 而使对拱坝的应力分析不能经济、有效地进行。因此, 寻求一种既经济合理又满足精度要求的高效率的拱坝计算方法是十分必要的。

本文提出的样条半解析法, 既具有解析法的优点, 又吸取了数值法的长处, 使得对拱坝的计算非常简单, 从而为用微机解决大问题提供了一种切实可行的途径。

### 1 基本原理

#### 1.1 基本假定

(1) 拱坝本身是由均质的各向同性的线弹性材料组成; (2) 地基为刚性, 即认为拱坝的底部与基础是刚性固结。对于弹性地基, 可以采用坝高延

长法或伏格脱假定予以考虑。

#### 1.2 位移函数

建立图1所示的基本坐标系, 坐标面均以拱坝的中面为基准面。

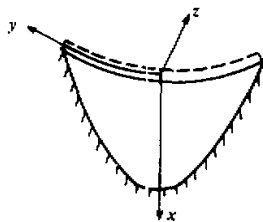


图1 拱坝中面坐标图

因此, 拱坝的中面位移函数用样条半解析法表示为:

$$\{\delta\} = [u, v, w]^T, \quad (1)$$

式中:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^M [\phi] X_m \{a\}_m; \\ v &= \sum_{m=1}^M [\phi] Y_m \{b\}_m; \\ w &= \sum_{m=1}^M [\phi] Z_m \{c\}_m. \end{aligned} \quad (2)$$

其中:

$$\{a\}_m = [a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_{N-1}]^T;$$

收稿日期: 1999-06-30; 修订日期: 1999-09-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(18972061)

作者简介: 王复明(1957-), 男, 河南省沈丘县人, 郑州工业大学教授, 博士, 博士生导师, 主要从事工程结构力学分析及检测评价技术方面的研究。

$$\{b\}_m = [b_{-1}, b_0, b_1, \dots, b_{N-1}]^T; \quad (3)$$

$$\{c\}_m = [c_{-1}, c_0, c_1, \dots, c_{N-1}]^T.$$

式中:  $a_i, b_i, c_i$  为待定的样条结点参数.

$$[\phi] = [\phi_{-1}, \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}]^T, \quad (4)$$

式中:  $\phi_i = \phi_i(x)$ , 是一组与三次  $B$  样条有关的基函数<sup>[1]</sup>, 对应于下列划分:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = H, x_i = ih, h = \frac{H}{N}.$$

显然, 这组基函数满足条件  $x = H, \phi_{(i)} = 0, \phi'_{(i)}(x) = 0$ .

$X_m = X_m(y), Y_m = Y_m(y), Z_m = Z_m(y)$  是满足  $y$  方向支承条件的正交函数, 对拱坝可取为

$$X_m = \sin \frac{(2m-1)\pi[y+b(k)]}{2b(k)}; \quad (5)$$

$$Y_m = \sin \frac{2m\pi[y+b(k)]}{2b(k)}; \quad (6)$$

$$Z_m = \sin \frac{\mu_m[y+b(k)]}{2b(k)} = \text{sh} \frac{\mu_m[y+b(k)]}{2b(k)} - \alpha_m \left[ \cos \frac{\mu_m[y+b(k)]}{2b(k)} - \text{ch} \frac{\mu_m[y+b(k)]}{2b(k)} \right]. \quad (7)$$

式中:

$$\mu_m = 4.7300, 10.9960, \dots, (4m-1)\pi/2, \dots;$$

$$\alpha_m = \frac{\sin \mu_m - \text{sh} \mu_m}{\cos \mu_m - \text{ch} \mu_m}, m = 1, 2, \dots, M.$$

显然, 式(2)满足拱坝的刚性支承条件.

### 1.3 平衡方程

根据弹性薄壳的基本理论, 坝体的总位能泛函可以表示为

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_x (\{\epsilon\}^T [J] \{\epsilon\} + \{x\}^T [D] \{x\} - 2\{w\}^T \{q\}) ds, \quad (8)$$

式中:

$$\{\epsilon\} = [\{\epsilon\}_x, \{\epsilon\}_y, \{\epsilon\}_{xy}]^T;$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - k_1 w,$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - k_2 w,$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x},$$

式中:  $k_1, k_2$  分别为拱坝在  $x$  向和  $y$  向的曲率.

$$\{x\} = \left[ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T;$$

$$[J] = \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix};$$

$$J = \frac{Et}{1-\mu^2};$$

$$[D] = D \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix};$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}.$$

以上诸式中,  $s$  为拱坝中面面积;  $t$  为拱坝厚度;  $\{q\} = [q_x, q_y, q_z]^T$ .

为了简化计算, 将壳体的总位移分条进行计算, 即以样条结点  $x_i$  将坝体分为  $N$  个亮条, 取各亮条的平均宽度  $2b(k)$ , 将其简化为矩形亮条, 分别计算各亮条的总势能, 然后累加, 作为整个坝体的总势能, 即

$$\Pi = \sum_{k=1}^N \Pi_k = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \int_{-b(k)}^{b(k)} (\{\epsilon\}^T [J] \{\epsilon\} + \{x\}^T [D] \{x\} - 2\{w\}^T \{q\}) dy dx. \quad (9)$$

利用最小位移原理  $\delta \Pi = 0$ , 可得平衡方程, 据振型函数, 并由式(5), (6), (7)的正交性, 可以对级数各项分别计算, 然后累加得到级数每一项的平衡方程为:

$$[G]_m \{r\}_m = \{f\}_m, m = 1, 2, \dots, M. \quad (10)$$

式中:

$$\{r\}_m = [\{a\}_m^T, \{b\}_m^T, \{c\}_m^T]^T;$$

$$[G]_m = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix}; \quad (11)$$

$$[G_{11}] = J \sum_{k=1}^N \left[ F_x^k [C_x^k] + \frac{1}{2}(1-\mu) C_x^k [F_x^k] \right];$$

$$[G_{12}] = J \sum_{k=1}^N \left[ -\mu H_{xy}^k [H_x^k] + \frac{1}{2}(1-\mu) H_{xy}^k [H_x^k] \right];$$

$$[G_{13}] = J \sum_{k=1}^N (k_1 + \mu k_2) F_{xy}^k [H_x^k]^T;$$

$$[G_{22}] = J \sum_{k=1}^N \left[ C_y^k [F_y^k] + \frac{1}{2}(1-\mu) F_y^k [C_y^k] \right];$$

$$[G_{23}] = J \sum_{k=1}^N (\mu k_1 + k_2) H_{xy}^k [F_y^k];$$

$$[G_{33}] = J \sum_{k=1}^N (k_1^2 + 2\mu k_1 k_2 + k_2^2) F_x^k [F_x^k] +$$

$$D \sum_{k=1}^N [F_x^k [A_x^k] + \mu B_x^k ([B_x^k] + [B_x^k]^T) + 2(1-\mu) C_x^k [C_x^k] + A_x^k [F_x^k]];$$

$$[G_{21}] = [G_{12}]^T; [G_{31}] = [G_{13}]^T; [G_{32}] = [G_{23}]^T.$$

其中,  $[A_z^k], [B_z^k], [C_z^k], [F_z^k], [H_z^k]$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ) 的值可参考文献[2].  $A_z^k, B_z^k, C_z^k, F_z^k, C_x^k, C_y^k, F_x^k, F_y^k, F_{xz}^k, H_{xy}^k, H_{yz}^k, H_{yx}^k$  为下列常数:

$$A_z^k = \int_{-b(k)}^{b(k)} Z_m'' Z_m'' dy; B_z^k = \int_{-b(k)}^{b(k)} Z_m'' Z_m'' dy;$$

$$C_z^k = \int_{-b(k)}^{b(k)} Z_m'' Z_m'' dy; F_z^k = \int_{-b(k)}^{b(k)} Z_m Z_m dy;$$

$$C_x^k = \int_{-b(k)}^{b(k)} X_m' X_m' dy; C_y^k = \int_{-b(k)}^{b(k)} Y_m' Y_m' dy;$$

$$F_x^k = \int_{-b(k)}^{b(k)} X_m X_m dy; F_y^k = \int_{-b(k)}^{b(k)} Y_m Y_m dy;$$

$$F_{xz}^k = \int_{-b(k)}^{b(k)} X_m Z_m dy; H_{xy}^k = \int_{-b(k)}^{b(k)} Z_m' Z_m' dy;$$

$$H_{yz}^k = \int_{-b(k)}^{b(k)} X_m Y_m dy; H_{yx}^k = \int_{-b(k)}^{b(k)} Z_m Y_m dy;$$

$$\{f\}_m = [\{f\}_a^T, \{f\}_b^T, \{f\}_c^T]^T;$$

$$\{f\}_a = \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)h}^{kh} \int_{-b(k)}^{b(k)} [\phi]^T X_m q_x dy dx;$$

$$\{f\}_b = \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)h}^{kh} \int_{-b(k)}^{b(k)} [\phi]^T Y_m q_x dy dx;$$

$$\{f\}_c = \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)h}^{kh} \int_{-b(k)}^{b(k)} [\phi]^T Z_m q_x dy dx.$$

求解方程组(10);可得待定参数  $\{r\}$ ,代入式(2),可得相应的位移.再由公式

$$\{N\} = [J]\{\varepsilon\}; \quad (12)$$

$$\{M\} = [D]\{x\}; \quad (13)$$

即可求出内力;根据材料力学知识可求出拱坝的垂直应力及上、下游面的应力.

对于变厚度拱坝,则可取各壳条的平均厚度  $\bar{t}(k)$  计算刚度系数矩阵,并且  $\bar{t}(k)$  参加求和计算,可以得到满意的结果.

### 3 计算实例

某圆筒拱坝几何尺寸如图2所示,  $E = 3 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ,对此坝的静力分析,国内外不少文献进行了计算.本文将该拱坝分为若干壳条,分别求解若干个33阶的线性方程,累加得到位移值,其结果如图3所示.

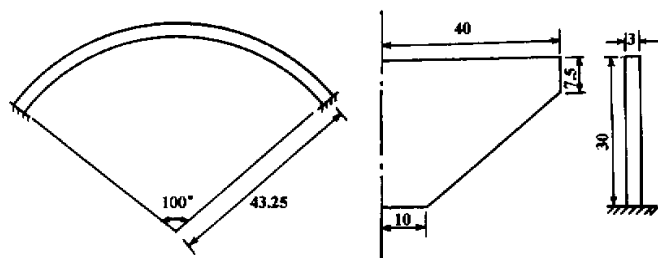


图2 拱坝尺寸图(单位:m)

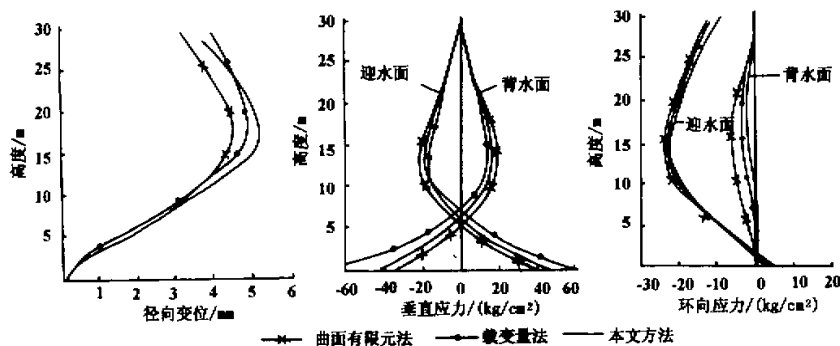


图3 拱坝变位、应力分布图

计算结果表明,利用本文提出的方法计算拱坝的静力、位移和应力,与有限元法的精度相当,与拱坝模态法[3]分析的结果也比较一致,这说明本方法的精度是比较高的.

### 4 结束语

本文提出的薄拱坝静力分析的样条半解析法原理简单,应用方便,计算工作量大,且能达到比较高的精度,可以在微机上解决拱坝的计算问题,

为解决拱坝这种复杂结构的静力分析提供了一条经济有效的途径。

利用本文提出的方法原理,还可以进一步解决拱坝的动力特性计算问题<sup>[4]</sup>,这里篇幅有限,没有列出。

### 参考文献:

[1] 秦 荣.结构力学的样条函数方法[M].南宁:广西

人民出版社,1983.

[2] 王复明.层状地基分析的样条半解析法及其应用[D].大连:大连理工大学,1987.

[3] 孙克明.截变量分原理和广义边界单元法及其应用[D].大连:大连理工大学,1987.

[4] 周鸿钧,林 皋,王复明.薄拱坝自振特性的简便计算法[J].水利学报,1987(8):63-68.

## Spline Semi - analytical Method for Stress Analysis of Thin Arch Dams

WANG Fu - ming<sup>1</sup>, FENG Hong - jian<sup>2</sup>, ZHOU Hong - jun<sup>1</sup>

(1. College of Hydraulic & Environmental Engineering, Zhengzhou University of Technology, Zhengzhou 450002, China; 2. Henan Province Construction and Installation Company, Zhengzhou 450002, China)

**Abstract:** Based on the theory of shells and variational principle, with the spline finite element method, a semi analytical method which is used to analyse thin arch dams is presented in this paper. It overcomes the shortcomings of finite element method with heavy computational work and expensive cost of solution. Compared with the finite element method and other numerical methods, this method proves to be adequately accurate and highly effective.

**Key words:** thin arch dam; static analysis; spline semi - analytical method; finite element method

## 《郑州工业大学学报》(社会科学版)稿约

《郑州工业大学学报》(社会科学版)是反映本校教学科研成果的社会科学综合性学术期刊.创刊于1982年,原为河南省内部期刊,现已被国家新闻出版署批准为公开发行,刊号为CN 41 - 5067/C,季刊.《郑州工业大学学报》(社会科学版)刊登马列主义、毛泽东思想理论研究;邓小平理论学习和发展;文学、史学、哲学、美学、经济学、教育学研究;工商管理、图书管理、教学管理、行政管理研究;建筑文化和外语教学研究等内容.现向广大读者征集高质量的稿件,欢迎校内外的专家和学者不吝赐稿.

联系地址:郑州市文化路97号

郑州工业大学学报编辑部

邮政编码:450002

联系电话:0371 - 3887128