

文章编号:1007-6492(1999)04-0039-02

## 超立方上拟块三对角方程组快速求解算法

王霞<sup>1</sup>, 赵玲玲<sup>2</sup>, 赵文莲<sup>3</sup>, 沈伟利<sup>4</sup>

(1. 郑州工业大学数理力学系, 河南 郑州 450002; 2. 周口高等师范专科学校数学系, 河南 周口 466000;  
3. 郑州市教育委员会建筑设计室, 河南 郑州 450052; 4. 郑州市第一商业技工学校, 河南 郑州 450007)

**摘 要:** 为快速求解大型拟块三对角方程组, 根据超立方多处理机系统的结构特点、通讯特征, 结合求解问题本身的特点, 给出了一种快速算法, 并分析了该算法的运行时间复杂性. 在并行虚拟环境(PVM)下做了数值试验, 求出了在多台工作站上的运行时间及加速比, 并与共享内存多处理机上运行结果进行比较, 证明该算法在超立方上运行速度较快.

**关键词:** 超立方; 多处理机系统; PVM 环境; 加速比; 共享内存

**中图分类号:** O 241.6 **文献标识码:** A

### 0 引言

超立方<sup>[1]</sup>是近年来发展起来并广为应用的一种分布式多处理机系统.  $n$  维超立方由  $N = 2^n$  个结点处理机(记作 PE)组成, 当且仅当  $i$  与  $j$  ( $0 \leq i, j < N$ ) 的二进制表示仅有一位不同时,  $PE_i$  与  $PE_j$  连接, 可相互直接通讯. 本文主要根据超立方的结构、通讯特点及求解问题本身特点来设计算法, 尽量减少通讯开销, 以达到并行算法以空换时的目的. 在数值求解微分方程的差分方法和有限元方法中, 拟块三对角方程组的求解问题是经常遇到的, 文献[2]中给出其 LU 分解方法, 文献[3]中给出其局部选主元的并行求解方法, 而主对角占优的拟块三对角方程组的求解很复杂, 规模之大, 使串行求解耗时很长, 本文在超立方上设计其并行求解算法<sup>[4]</sup>, 大大缩短了计算时间.

### 1 算法设计

考虑拟块三对角方程组

$$AX = B,$$

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & & & & & A_{0,n-1} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & & & & \\ & A_{21} & A_{22} & A_{23} & & & \\ & & & & A_{n-2,n-3} & A_{n-2,n-2} & A_{n-2,n-1} \\ & & & & & A_{n-1,n-2} & A_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_{N-2} \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_{N-2} \\ B_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中:  $A_{ij}$  为  $m \times m$  子矩阵,  $A$  主对角占优;  $X_i, B_i$  均为  $m \times 1$  的子向量.

设式(1)的规模为  $M = 2^q \times m$  (即  $N = 2^q$ ), 考虑在  $n$  维超立方多处理机系统上求解式(1), 超立方共有  $p = 2^n$  个结点处理机, 将式(1)中  $A$  以行方式周期分组, 为使各结点处理机负载均衡, 有以下分裂方式:

设  $t = N/p$ ,  
则  $A = (A_0, A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_{p-1})^T$ .  
 $A_i, i = 0, 1, \dots, p-1$ , 含有  $A$  中的  $t$  行元素.

类似地, 分裂  $X$  和  $B$  为

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_{p-1})^T,$$

$$B = (B_1, B_2, \dots, B_i, \dots, B_{p-1})^T.$$

记分裂块  $(A_i, X_i, B_i)$  为  $P(i), i = 0, 1, \dots, p-1$ , 将每个分裂块映射到超立方的相应结点处理机上. 为使数据仅发生在相邻的结点处理机间, 规定以环绕方式映射各分裂块  $P(i)$  到相应的结点处理机上, 使得相邻的分裂块在处理机中也保持相邻.

收稿日期: 1999-04-12; 修订日期: 1999-06-29

基金项目: 河南省自然科学基金资助项目(994052500)

作者简介: 王霞(1970-), 女, 河南省开封县人, 郑州工业大学讲师, 硕士, 主要从事并行算法方面的研究.

$$P(i) \xrightarrow{\text{映射}} P_{n0}(G_n(i)); \quad i = 0, 1, \dots, p-1. \quad (2)$$

这些  $G_n(i)$  表示自然码  $i$  转换为二进制返射 Graycode,  $P_n(G_n(i))$  表示结点处理机的二进制编号。

图1为环形网络嵌入超立方示意图。由图1可知, 环形网络嵌入到超立方中, 自然码相邻的数, 在超立方中其 BRGC 也相邻, 因此由式(2)的映射方式求解式(1), 使通讯仅发生在相邻的处理机间, 如结点处理机编号 010 仅与 011 和 110 通讯, 这也正与求解问题本身相符合, 因而大大减少通讯开销。

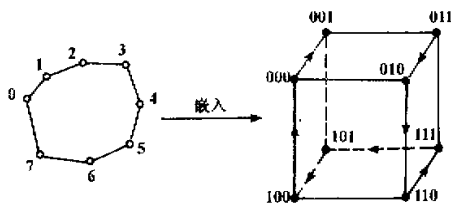


图1 环形网络嵌入超立方

由以上分析, 提出以下算法:

步骤1 将  $P(i) (i = 0, 1, 2, \dots, p-1)$  以环绕方式映射到相应的超立方各结点处理机上, 相邻的分裂块在结点处理机上也保持相邻, 映射方式为式(2)。

步骤2 各结点处理机接到数据后同时进行迭代计算, 相邻处理机间进行通讯, 传递数据。各结点处理机的计算若满足精度  $|r_i| < \epsilon$ , 则以超立方的 Gather 算法汇集  $r_i$  到  $P_{n0}(G_n(i))$  中, 在其上计算整体精度  $r$ , 若  $|r| < \epsilon$ , 则结束迭代, 否则继续。其中,  $\epsilon$  为精度控制;  $r$  为整体向量误差;  $r_i$  为局部向量误差。

## 2 复杂性分析

为简明起见, 仅分析每个基本迭代步的时间而略去最后精度判断时间。假设一次矩阵与向量乘运算耗时的最大时间单位为  $\tau_1$ , 一次向量四则运算耗时最大时间单位为  $\tau_2$ , 一次传递向量的数据通讯时间为  $\tau_3$ , 则基本迭代步的计算时间为  $3\tau_1 + 6\tau_2$ , 通讯时间为  $2\tau_3$ 。

若式(1)中  $A$  对角占优, 对任给初始近似值  $X^0 \in R^M$ , 则算法收敛, 且基本迭代步的时间复杂度为  $3\tau_1 + 6\tau_2 + 2\tau_3$ 。

## 3 数值试验

取一简单的例子, 求解

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & u \in (0, 1) \times (0, 1); \\ u = x + y, & u \in \Gamma. \end{cases}$$

用差分格式离散化, 规模为 32, 启动 4 个进程, 精度控制为  $\epsilon = 10^{-5}$ ,  $t_i$  为运行时间。表1、表2为武汉大学软件工程实验室 4 台 SUN4 工作站上 PVM 环境下的运行结果。

表1 超立方上运行结果

工作站/台	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t$
1	1468327	1492772	1493391	1504625	1489779
2	1117649	981558	1067921	1020152	1046820
3	926147	934808	930002	929636	930148
4	702141	719914	704245	711417	709429

说明: 加速比  $SP_4 = 2.1$ ,  $SP_3 = 1.6$ ,  $SP_2 = 1.42$ 。

表2 模拟共享内存运行结果

工作站/台	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t$
1	1440813	1461786	1526101	1503268	1482992
2	1231326	1150650	1203099	1184040	1192279
3	1082708	1018762	993303	1048209	1035746
4	802652	804671	787869	798041	798308

说明: 加速比  $SP_4 = 1.85$ ,  $SP_3 = 1.43$ ,  $SP_2 = 1.24$ 。

从表中可看出, 算法在超立方上运行速度较快, 在一台工作站上模拟超立方结构效果并不好, 因为数据传送函数 PVM-send 和 PVM-recv 相对耗时大, 而在多台工作站上才能显示出其内在的并行性。另外, 问题规模越大越能显示其优越性。

## 参考文献:

- [1] YUCEF S, MARTIN H. Topological properties of hypercubes[J]. IEEE Tran Comput, 1988, 37(7): 867-872.
- [2] 胡庆丰, 何新芳, 李晓梅. 求解拟块三对角方程组的分块追赶法及并行计算[A]. 中国青年计算机研究会. 中国青年计算机研究进展——NCYC'91 论文集[C]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1991.
- [3] 胡庆丰, 何新芳, 李晓梅. 局部选主元的拟块三对角方程组的并行求解[A]. 全国计算数学学会并行算法专业委员会. 全国第三届并行算法学术会议论文集[C]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1992.
- [4] 王霞, 陈鹏, 赵玲玲. 超立方多处理机上大型线性方程组并行迭代求解算法[J]. 郑州工业大学学报, 1998, 19(3): 86-89.

(下转 77 页)

## Indirect Electrooxidation of O - chlorotoluene to O - chlorobenzaldehyde Using $Mn^{3+}$ As Oxidant

LI Zhu - xia, LIU Guo - ji, LUO Ting - liang, ZHAO Yao - min, CHEN Jin - zhong

(College of Chemical Engineering, Zhengzhou University of Technology, Zhengzhou 450002, China)

**Abstract:** The oxidation of o - chlorobenzaldehyde from o - chlorotoluene is conducted using  $Mn^{3+}$  in sulfuric acid as a mediator, and the  $Mn^{3+}$  is generated by electrolytic oxidation of manganous sulfate. The optimum conditions of electrolytic oxidation experiment are determined through the orthogonal tests and mono - factor optimization experiments of manganous sulfate, and current efficiency is 84.30%. Reaction conditions of organic oxidation are also optimized to obtain maximum oxidation yield for o - chlorobenzaldehyde and reaction rate through the optional test. The yield for o - chlorobenzaldehyde attains 90.63%, and the reaction rate is  $6.183 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$ . The process can be used in actual industrial production.

**Key words:**  $Mn^{3+}$ ; electrolytic oxidation; indirect electrooxidation; o - chlorobenzaldehyde

(上接 40 页)

## A Fast Algorithm of Quasi - block Triangular Equations on Hypercube

WANG Xia<sup>1</sup>, ZHAO Ling - ling<sup>2</sup>, ZHAO Wen - lian<sup>3</sup>, SHEN Wei - li<sup>4</sup>

(1. College of Mathematics, Physics & Mechanics, Zhengzhou University of Technology, Zhengzhou 450002, China; 2. Department of Mathematics, Zhoukou Teachers College, Zhoukou 466000, China; 3. Office of Architecture Design, Zhengzhou Educational Committee, Zhengzhou 450052, China; 4. Zhengzhou First Commercial Technology School, Zhengzhou 450007, China)

**Abstract:** According to the topological property of hypercube and the hallmark of the problem to be solved, a fast algorithm to solve large quasi - block triangular equations is presented. Its time complexity and numerical experiment under PVM environment are conducted. The operational time and speedup on a few workstations are gotten. Compared with the shared memory multiprocess, the algorithm runs faster on hypercube.

**Key words:** hypercube; multiprocess system; PVM environment; speedup; shared memory