文章编号:1007-6492(1999)04-0101-02

矩形域上非正常积分的一种数值算法

郭森林[1], 张新育[2], 杨松华[2]

(1.郑州纺织工学院基础部,河南 郑州 450007; 2.郑州工业大学数理力学系,河南 郑州 450002)

摘 要: 给出了矩形域上一顶点为奇点的非正常积分的近似计算以及优化中心数值算法,此种算法避免了函数值的大量重复计算,采用外推法减少了迭代次数,可尽快达到符合精度要求的近似值,且提出的优化数值算法便于在计算机上进行计算.

关键词: 非正常积分; 近似计算; 中心算法

中图分类号: O 241.4 **文献标识码**: A

0 引言

对于高维正常积分的近似计算,文献[1]进行了详细的讨论,而对于非正常积分的近似计算,文献[2~6]对于一维的情况进行了讨论.本文对于矩形区域上一顶点为奇点的非正常积分的近似计算给出优化中心数值算法.

1 矩形域上复化中心算法

设 $D=[a,b]\times[c,d]$ 为任一矩形区域,顶点 (a,c) 为函数 $f(x,y)$ 的奇点(瑕点),非正常积分

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

存在.

现把区间 $[a,b]$ 划分为 m 等分,$[c,d]$ 划分为 n 等分(m,n 为自然数),这样就把区域 D 划分为 mn 个小矩形域 $D_{ij}^{(1)}$, $D_{ij}^{(1)}=\{(x,y)\mid x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i, y_{j-1}\leqslant y\leqslant y_j\}$, $i=1,2,\cdots,m$; $j=1,2,\cdots,n$. 在 $D_{ij}^{(1)}$ 上运用中心公式,即

$$\iint_{D_{ij}^{(1)}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\approx h_1g_1f(x_{\frac{2i-1}{2}},y_{\frac{2j-1}{2}}), \tag{2}$$

其中:

$h_1=(b-a)/m$, $x_k=a+kh_1$, k 为实数;

$g_1=(d-c)/n$, $y_k=c+kg_1$, k 为实数.

然后相加,可以得到式(1)的第一次近似值

$$I\approx L_1=h_1g_1\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f(x_{\frac{2i-1}{2}},y_{\frac{2j-1}{2}}). \tag{3}$$

再把区间 $[x_{i-1},x_i]$ 与 $[y_{j-1},y_j]$ 分别3等分,将区域 D 划分为 $3m\cdot3n$ 个小矩形域 $D_{ij}^{(2)}$,然后在每个 $D_{ij}^{(2)}$ 上运用中心公式,相加后可得式(1)的第二次近似值

$$I\approx L_2=h_2g_2\sum_{i=1}^{3m}\sum_{j=1}^{3n}f(x_{\frac{2i-1}{2}},y_{\frac{2j-1}{2}}), \tag{4}$$

其中:

$h_2=h_1/3$, $x_k=a+kh_2$, k 为实数;

$g_2=g_1/3$, $y_k=c+kg_2$, k 为实数.

这样下去,可得式(1)的第 r 次近似值

$$I\approx L_r=h_rg_r\sum_{i=1}^{m\cdot3^{r-1}}\sum_{j=1}^{n\cdot3^{r-1}}f(x_{\frac{2i-1}{2}},y_{\frac{2j-1}{2}}), \tag{5}$$

其中:

$h_r=h_{r-1}/3$, $x_k=a+h_rk$, k 为实数;

$g_r=g_{r-1}/3$, $y_k=c+g_rk$, k 为实数.

关于算法的收敛性证明,可参见文献[7,8].

2 矩形域上中心算法的优化与外推

若按次序依次计算 $L_1,L_2,\cdots,L_r$,将会导致函数值的重复计算,因而有必要对上面的算法进行优化.

$r=1$ 时,把式(3)写成如下形式:

$$U_1=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f(x_{\frac{2i-1}{2}},y_{\frac{2j-1}{2}}), \tag{6}$$

$$L_1^{(0)}=L_1=h_1g_1U_1; \tag{7}$$

收稿日期:1999-03-09; **修订日期**:1999-05-19

基金项目:河南省自然科学基金资助项目(994053200)

作者简介:郭森林(1965-),男,河南省新郑市人,郑州纺织工学院讲师,硕士,主要从事数值积分方面的研究.

$r=2$时,式(4)化为如下形式:

$$U_2 = U_1 + \sum_{\substack{i=1 \\ [\frac{2i-1}{3}\neq s,\frac{2j-1}{3}\neq t]}}^{3m}\sum_{j=1}^{3n} f(x_{\frac{2i-1}{2}}, y_{\frac{2j-1}{2}}) , \quad (8)$$

其中,$[\frac{2i-1}{3}\neq s,\frac{2j-1}{3}\neq t]$表示$\frac{2i-1}{3}$与$\frac{2j-1}{3}$至少有一个不为整数时,

$$L_2^{(0)} = L_2 = h_2 g_2 U_2. \quad (9)$$

在式(8)中,U_1中的函数值避免了重复计算,直接转入U_2中.

同样,把式(5)化为如下计算形式:

$$U_r = U_{r-1} + \sum_{\substack{i=1 \\ [\frac{2i-1}{3}\neq s,\frac{2j-1}{3}\neq t]}}^{m\cdot 3^{r-1}}\sum_{j=1}^{n\cdot 3^{r-1}} f(x_{\frac{2i-1}{2}}, y_{\frac{2j-1}{2}}) , \quad (10)$$

$$L_r^{(0)} = L_r = h_r g_r U_r. \quad (11)$$

在式(10)中,U_{r-1}中的函数值避免了重复计算,直接转入U_r中.

为了快速得到符合精度要求的近似值,减少迭代次数,对$L_1^{(0)},L_2^{(0)},\cdots,L_r^{(0)}$进行外推[7,8],即令$\mu=9;\beta=r-1,r-2,\cdots,1;\alpha=1,2,\cdots,\beta$,

$$L_\beta^{(\alpha)} = \frac{\mu^\alpha L_{\beta+1}^{(\alpha-1)} - L_\beta^{(\alpha-1)}}{\mu^\alpha - 1} , \quad (12)$$

如果$|L_1^{(\alpha)} - L_1^{(\alpha-1)}| < \varepsilon$($\varepsilon$为预先给定的精度),则取$I = L_1^{(\alpha)}$作为式(1)的近似值;否则继续迭代.

致谢:本文得到了合肥工业大学蒋和理教授的热情指导,在此表示感谢.

参考文献:

[1] 徐利治,周蕴时.高维数值积分[M].北京:科学出版社,1980.

[2] MILLER R K. On ignoving the singularity in numerical quadruture[J]. Math Comput,1971,25:521 - 532.

[3] EL - TOM M E A. On ignoving the singularity in approximate integration[J]. SIAM J Numer Anal,1971(8):412 - 424.

[4] PIESSENS R, MERTENS I, BRANDERS M. Automatic integration of functions having end point singularities[J]. Angew Informatik,1974,16:65 - 68.

[5] LU Jian - de. On singular integrals with singularities of high fractional order and their applications[J]. Acta Math Sci,1982,2(2):211 - 228.

[6] LU Chen - ke. A class of quadrature formulas of chebyshev type for singular integrals[J]. J Math Anal Appl,1984,100:416 - 435.

[7] 蒋和理. n重积分优化中心数值算法[J].合肥工业大学学报(自然科学版),1990,13(1):15 - 19.

[8] 蒋和理.无穷域二重积分优化中心数值算法[J].安徽工学院学报,1989,8(3):10 - 17.

[9] 蒋慧琴,许雅静,原新凤.数值求解 Abel 积分方程的正则化方法[J].郑州工业大学学报,1996,17(2):53 - 59.

A Numerical Algorithm of Singular Integrals over Rectangular Domains

GUO Sen - lin[1], ZHANG Xin - yu[2], YANG Song - hua[2]

(1. Department of Basic Sciences, Zhengzhou Textile Institute, Zhengzhou 450007, China; 2. Department of Mathematics, Physics & Mechanics, Zhengzhou University of Technology, Zhengzhou 450002, China)

Abstract: An optimum numerical algorithm of center rule for approximate evaluation of singular integrals over rectangular domains with a vertex singularity is presented. With this algorithm, functional values of the integrals can be avoided from being computed repeatedly. Iterative numbers are reduced with extrapolative method, so desirable approximate value of the integral is obtained more rapidly. It is easy to compute the integrals in computers with the optimum algorithm presented in this paper.

Key words: singular integrals; approximate evaluation; center rule