

弹性支承对斜拉桥拉索自振特性的影响

郭向荣¹, 陈 淮²

(1.长沙铁道学院土木建筑工程学院,湖南 长沙 410075;2.郑州工业大学土木建筑工程学院,河南 郑州 450002)

摘 要:根据斜拉桥柔性拉索的结构特点,建立了具有弹性支承的斜拉桥柔性拉索的动力分析模型.从势能驻值原理出发,导出了斜拉桥柔性拉索在两端弹性支承情况下的振动方程,按“对号入座”法则得到了柔性拉索体系的刚度矩阵和质量矩阵,并分析了弹性支承对斜拉桥柔性拉索自振特性的影响,所得结果可用于确定斜拉桥拉索的预拉力.该模型是斜拉桥拉索动力分析的实用模型.

关键词:弹性支承;斜拉桥;柔性拉索;自振特性

中图分类号:U 448.27 文献标识码:A

现代斜拉桥施工中,斜拉桥拉索预拉力的控制是至关重要的,而现在对斜拉桥拉索预拉力的测定一般采用间接测量法,即通过测定斜拉索自振频率,再由此实测频率依据计算公式反算出斜拉索的预拉力.实践证明,此种方法与实际还存在一定误差,主要原因之一就是计算公式中假定拉索两端固结,没有考虑桥梁主梁和索塔对拉索形成弹性支承的影响.本文对此问题进行了研究,分析弹性支承对柔性拉索自振特性的影响.

1 基本原理

由于斜拉桥拉索两端分别固结在索塔和主梁上,而索塔和主梁本身为弹性结构,使得索塔、主梁的振动与拉索的振动互相影响.为了将问题简化,任意抽取斜拉桥一根拉索进行分析,若只考虑顺桥面内垂直于拉索方向的振动,可以将其抽象成如图 1 所示的计算简图,图中拉索的线密度为 ρ ,索长为 l ,预拉力为 T ,以等效刚度 K_b 和等效质量 m_b 模拟拉索与主梁固结处主梁的振动特性,以等效刚度 K_t 和等效质量 m_t 模拟拉索与索塔固结处索塔的振动特性. K_b, K_t, m_b, m_t 可以用以下方法确定,设在主梁与拉索固结处沿竖向作用一个单位力 F_b ,主梁所产生的竖向位移为 D_b ,记 $K'_b = F_b/D_b$,则 K_b 为 K'_b 在垂直于拉索方向的分量, $K_b = K'_b \cos \theta$,其中, θ 为拉索与主梁的夹角;设主梁的第 1 阶竖向自振频率为 f_b ,根据结构动

力学理论, $f_b = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K'_b}{m_b}}$,得到等效质量 $m_b = \frac{K'_b}{4\pi^2 f_b^2}$.同理,设在索塔和拉索固结处在顺桥面内沿纵向作用一个单位力 F_t ,索塔在该处所产生的沿桥纵向位移为 D_t ,记 $K'_t = F_t/D_t$,则 K_t 为 K'_t 在垂直于拉索方向的分量, $K_t = K'_t \sin \theta$,设索塔的第 1 阶顺桥面内横向自振频率为 f_t ,同理可得等效质量 $m_t = K'_t/(4\pi^2 f_t^2)$.

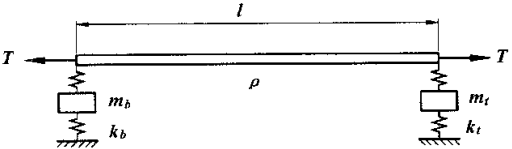


图 1 斜拉桥拉索计算简图

假定拉索小振幅振荡时,其横向挠度甚小,拉索的原始总长度 l 保持不变,以致可以忽略张力 T 的变化.由于柔顺性,拉索不能抵抗弯曲,张力始终沿其切线方向.

设拉索的位移 $y(x, t)$ 为一个线性函数 $y_1(x, t)$ 模拟拉索两端弹性支承变位所产生的拉索位移,与 n 个正弦函数 $y_2(x, t)$ 模拟拉索自身的变形)的叠加,即

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t), \quad (1)$$

式中: $y_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$; $y_2(x, t) = y_b +$

$\frac{y_t - y_b}{l}x$. 其中 y_b, y_t 分别为弹簧在 A, B 点处某一时刻的竖向位移; A_n 为第 n 个正弦波某一时刻的幅值. 拉索系统的能量计算及一阶变分计算为

(1) 弹性支承的弹性应变能

$$U_{kb} = \frac{1}{2} K_b y_b^2; U_{kt} = \frac{1}{2} K_t y_t^2.$$

其变分为

$$\delta U_{kb} = y_b K_b \delta y_b; \delta U_{kt} = y_t K_t \delta y_t. \quad (2)$$

(2) 外荷位势

$$U_T = \int_0^l \frac{1}{2} \cdot T \cdot (y')^2 \cdot dx.$$

将式(1)代入上式后, 变分得

$$\delta U_T = \frac{T}{l} y_b \delta y_b + \frac{T}{l} y_t \delta y_t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2 T}{2l} A_n \delta A_n - \frac{T}{l} y_t \delta y_t - \frac{T}{l} y_b \delta y_b. \quad (3)$$

(3) 拉索的惯性力虚功

$$\delta U_m = \int_0^l \rho \ddot{y} \delta y dx.$$

将式(1)代入上式后, 化简得

$$\delta U_m = \rho \left[\frac{l}{3} \ddot{y}_b \delta y_b + \frac{l}{6} \delta y_b \ddot{y}_t + \delta y_b \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{A}_n \frac{l}{n\pi} + \frac{l}{6} \delta y_t \ddot{y}_b + \frac{l}{3} \ddot{y}_t \delta y_t + \delta y_t \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{A}_n (-1)^{n+1} \frac{l}{n\pi} + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{A}_n \delta A_n \cdot \frac{l}{2} \right]. \quad (4)$$

式(4)中等效质量 m_b, m_t 的惯性力虚功

$$\delta U_{mb} = m_b \ddot{y}_b \delta y_b; \delta U_{mt} = m_t \ddot{y}_t \delta y_t. \quad (5)$$

系统总能量 Π 的变分为

$$\delta \Pi = \delta U_{kb} + \delta U_{kt} + \delta U_T + \delta U_m + \delta U_{mb} + \delta U_{mt}. \quad (6)$$

根据势能驻值原理^[1], 由 $\delta \Pi = 0$, 利用形成矩阵的“对号入座”法则^[2]可得到斜拉桥拉索体系的刚度矩阵 K 和质量矩阵 M 为

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{T}{l} + K_b & -\frac{T}{l} & & & & \\ -\frac{T}{l} & \frac{T}{l} + K_t & & & & \\ & & \frac{\pi^2 T}{2l} & & & \\ & & \frac{4\pi^2 T}{2l} & & & \\ & & \frac{9\pi^2 T}{2l} & & & \\ & & & & & \frac{16\pi^2 T}{2l} \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix};$$

万方数据

$$[M] = \rho \cdot$$

$$\begin{bmatrix} \frac{l}{3} + \frac{m_b}{\rho} & \frac{l}{6} & \frac{l}{\pi} & \frac{l}{2\pi} & \frac{l}{3\pi} & \frac{l}{4\pi} & \dots \\ \frac{l}{6} & \frac{l}{3} + \frac{m_t}{\rho} & \frac{l}{\pi} & -\frac{l}{2\pi} & \frac{l}{3\pi} & -\frac{l}{4\pi} & \dots \\ \frac{l}{\pi} & \frac{l}{\pi} & \frac{l}{2} & & & & \\ \frac{l}{2\pi} & -\frac{l}{2\pi} & \frac{l}{2} & & & & 0 \\ \frac{l}{3\pi} & \frac{l}{3\pi} & & \frac{l}{2} & & & \\ \frac{l}{4\pi} & -\frac{l}{4\pi} & & & \frac{l}{2} & & \\ & & 0 & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

考虑弹性支承的斜拉桥柔性拉索体系的自由振动特征方程为

$$([K] - \omega^2 [M])\{A\} = \{0\}, \quad (7)$$

式中 ω 和 $\{A\}$ 分别为拉索结构的自振圆频率和主振型.

求解方程(7), 即可求出拉索的自振频率.

2 $K_b(K_t), m_b(m_t)$ 对拉索第 1 阶自振频率的影响

(1) 当 K_t, K_b 趋向于无穷大, 且 $m_b = m_t = 0$ 时, 拉索两端的支承变成了刚性支承, 此时拉索结构体系的刚度矩阵和质量矩阵都变成对角阵.

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{\pi^2 T}{2l} & & & & \\ & \frac{4\pi^2 T}{2l} & & & \\ & & \frac{9\pi^2 T}{2l} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix},$$
$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{\rho l}{2} & & & & \\ & \frac{\rho l}{2} & & & \\ & & \frac{\rho l}{2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

由此可得

$$\omega_n = \sqrt{\frac{n^2 \pi^2 T}{2l} / \frac{\rho l}{2}} = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$
$$f_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (8)$$

式中 ω_m 为斜拉桥拉索的第 n 阶自振圆频率, rad/s ; f_n 为第 n 阶自振频率, Hz .

式(8)就是现场所采用的, 没有考虑索塔、主梁弹性支承影响的常规计算公式(以下称用该公

式计算得到的 ω 值为公式值)。

(2) 保持 m_b, m_t 不变(例如取 $m_b = m_t = 0.1$) ,改变 K_b, K_t (例如令 $K_b = K_t$ 从 $0.33\text{E}1$ 变到 $0.33\text{E}7$) ,由方程 (7)求得拉索第 1 阶自振圆频率 ω_1 ,列于表 1。

表 1 改变 $K_b(K_t)$ 时拉索 ω_1 的计算值

$K_b(K_t)$	0.33E1	0.33E2	0.33E3	0.33E4	0.33E5	0.33E6	0.33E7
ω_1	0.599	1.841	4.557	6.280	6.550	6.581	6.584

说明 本例中公式值 $\omega_0 = 6.584$ 。

可以看出 ,弹性支承时 , ω_1 计算值将比公式值小 ,弹性支承的刚性增大时 ,计算值逐渐接近公式值。

(3) 保持 K_b, K_t 不变(例如取 $K_b = K_t = 0.33\text{E}4$) ,改变索塔和主梁的自振频率 f_b, f_t ,这相当于改变 m_b, m_t (令 $m_b = m_t$) ,得到相应的 ω_1 ,列于表 2。

表 2 改变 $m_b(m_t)$ 时拉索 ω_1 的计算值

$m_b(m_t)$	0.1E0	0.1E1	0.1E2	0.1E3	0.1E4	0.1E5
ω_1	6.280	6.277	6.242	5.211	1.807	0.182

说明 本例中公式值 $\omega_0 = 6.280$ 。

可以看出 : m_t 减小 ,即 f_t 增大时 , ω_1 趋近于公式值。

(4) 取斜拉桥不同的拉索进行分析 ,若令 $\zeta = K / \left(\frac{\pi^2 T}{2l} \right)$, $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$ (ω_0 是公式值) 。考察 ζ 与 η 的关系 ,计算结果表明 ,无量纲化后 ,斜拉桥不同拉索的变化规律是一致的 ,表现在 $\zeta - \eta$ 曲线上 ,所有曲线均重合 ,如图 2 所示。

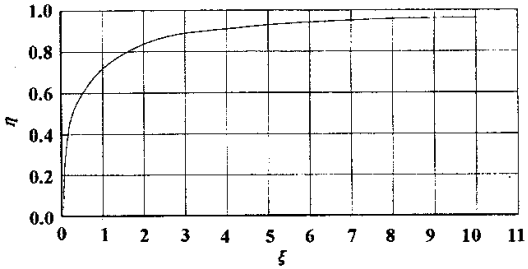


图 2 斜拉桥拉索 $\zeta - \eta$ 曲线

图 2 可应用于斜拉桥任一根拉索 ,对某一根拉索 ,首先求出 ζ 的值 ,再从图 2 查出相应的 η 值 ,并把实测 f 值代入常规计算公式 (8) 计算出拉索的拉力 T ,然后对 T 值进行修正 ,得到修正值 $T' = T / \eta^2$,即为拉索的预拉力。

3 结束语

本文建立了斜拉桥柔性拉索的动力分析模型 ,分析了弹性支承对斜拉桥柔性拉索振动特性的影响 ,并得到了能应用于斜拉桥任一根拉索的关系曲线图 2。利用图 2 ,可对按常规公式计算出的拉索预拉力 T 进行修正 ,提高了斜拉桥拉索预拉力的计算精度。

参考文献 :

[1] CLOUGH R W ,PENZIEN J. Dynamics of structures (second edition) [M] . New York :Mc Graw - Hill Inc , 1993 .
[2] 曾庆元 ,扬 平 .形成矩阵的“ 对号入座 ”法则与桁架空间分析的桁段有限元法[J] .铁道学报 ,1986 ,8 (2) 48 - 59 .

The Effect of Elastic Support on the Natural Frequency of Flexible Cable of Cable Stayed Bridge

GUO Xiang - rong¹ , CHEN Huai²

(1. College of Civil & Building Engineering ,Changsha Railway Institute ,Changsha 410075 ,China ; 2. College of Civil & Building Engineering ,Zhengzhou University of Technology ,Zhengzhou 450002 ,China)

Abstract :Based on structural characteristic of flexible cable of cable stayed bridge a model for dynamic analysis of flexible cable of cable stayed bridge with elastic support is presented .The vibration equations of flexible cable with elastic support are deduced according to the principle of stationary potential energy ,and the matrix of stiffness and mass are derived by the principle of “ fit in the right seat ” .The effect of elastic support on the natural frequency of flexible cable is analyzed .The results may be used to obtain the prestress of flexible cable of cable stayed bridge .The model proves to be practical for dynamic analysis of flexible cable .

Key words 弹性支承 ; cable stayed bridge ; flexible cable ; natural frequency