文章编号:1007－6492(2000)01－0089－03

两组等价命题的严格简明证法

陈建梅[1], 侯海森[2]

(1.郑州工业大学数理力学系,河南 郑州 450002;2.郑州自来水公司水源厂,河南 郑州 450002)

摘 要:在多元函数微积分应用中,给出了两组等价命题.两组等价命题一方面比其他文献的条件减弱,应用广泛,便于计算,大大提高了多元函数微积分在实际应用中的价值.另一方面从方法上给出了严格的证明,且此证明方法简明,思路新颖.

关键词:全微分;积分路径;有向光滑或分(段)片光滑曲(线)面

中图分类号:O 137 **文献标识码**:A

1 等价命题一

设 G 为 xoy 平面内的单连通开区域;$P(x,y)$, $Q(x,y)$, $P'_y(x,y)$, $Q'_x(x,y)$ 在 G 内均连续,则以下说法是等价的.

(1) $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在 G 内为某一函数 $u(x,y)$ 全微分;

(2) $Q'_x(x,y)=P'_y(x,y)\quad (x,y)\in G$;

(3) $\oint_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$,

式中:L 为 G 内任意给定的一条光滑或分段光滑的简单闭曲线;

(4) 曲线积分 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在 G 内与积分路径无关.即对任意给定两点 $M_0(x_0,y_0)$, $M(x,y)\in G$, L_1, L_2 均为 G 内连结以 $M_0(x_0,y_0)$ 为起点,以 $M(x,y)$ 为终点的光滑或分段光滑又本身不自交的、任意给定的曲线,且满足下列条件:

① $L_1\cap L_2=\{M_0(x_0,y_0),M(x,y)\}$;

② $L_1\cap L_2-\{M_0(x_0,y_0),M(x,y)\}=\{$有限个点$\}$;

③ $L_1\cap L_2-\{M_0(x_0,y_0),M(x,y)\}=\{$有限个弧段$\}$;

④ $L_1\cap L_2-\{M_0(x_0,y_0),M(x,y)\}=\{$有限个点$\}\cup\{$有限个弧段$\}$之一的两条曲线,均有

$$\int_{L_1}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{L_2}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

证明:(1)$\Rightarrow$(2).

因为 $\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$,

所以 $u'_x(x,y)=P(x,y)$, $u'_y(x,y)=Q(x,y)$.

由 $P'_y(x,y)$, $Q'_x(x,y)$ 在 G 内均连续,得 $u''_{xy}(x,y)=P'_y(x,y)$, $u''_{yx}(x,y)=Q'_x(x,y)$ 在 G 内也连续.

故 $u''_{xy}(x,y)=u''_{yx}(x,y)$, $(x,y)\in G$.

即在 G 内, $Q'_x(x,y)=P'_y(x,y)$.

证明(2)$\Rightarrow$(3).

由已知条件知

$$\oint_{L^+}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D[Q'_x(x,y)-P'_y(x,y)]\mathrm{d}\sigma,$$

式中:$\overline{D}$ 为 L 所围成的有界闭区域.

而在 G 内 $Q'_x(x,y)=P'_y(x,y)$,

所以在 $\overline{D}$ 上 $Q'_x(x,y)=P'_y(x,y)$,

故 $\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D 0\mathrm{d}\sigma=0.$

证明:(3)$\Rightarrow$(4).

① 当 $L_1\cap L_2=\{M_0(x_0,y_0),M(x,y)\}$时,

因为 $\oint_{L_1+L_2^-}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$,

所以 $\int_{L_1}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=$

$-\int_{L_2^-}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=$

收稿日期:1999－11－28;修订日期:1999－12－30

基金项目:河南省自然科学基金资助项目(984050700)

作者简介:陈建梅(1965－),女,河南省内黄县人,郑州工业大学讲师,主要从事函数论及其应用方面的研究.

$$\int_{L_2} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y .$$

② 当 $L_1 \cap L_2 - \{M_0(x_0,y_0), M(x,y)\} = \{$有限个点$\}$,如图 1 所示.

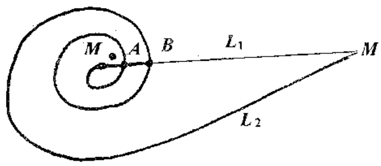

图 1 L_1 与 L_2 相交图

由①知:

$$\int_{M0L_1A} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{M0L_2A} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

$$\int_{AL_1B} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{AL_2B} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

$$\int_{BL_1M} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{BL_2M} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

所以 $$\int_{L_1} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{L_2} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

由②的证明过程类似可证③,④;

证明:(4) $\Rightarrow$ (1).

记 $F(x,y) = \int_{M_0(x_0,y_0)}^{M(x,y)} P(u,v)\mathrm{d}u + Q(u,v)\mathrm{d}v$,

下面只要证明,当 $(x,y) \in G$ 时,有

$$F'_x(x,y) = P(x,y), F'_y(x,y) = Q(x,y).$$

由 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 G 内连续,

得 $F'_x(x,y), F'_y(x,y)$ 在 G 内连续.

从而当 $(x,y) \in G$ 时,有

$$\mathrm{d}F(x,y) = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

下面证明:$F'_x(x,y) = P(x,y)$.

因 G 为 xoy 平面内的开区域,所以对任意给定一点 $(x,y) \in G$,可取 $M'(x+\Delta x, y) \in G$,且线段 $\begin{cases} u = u \\ v = y \end{cases}$ (u 由 x 到 $x+\Delta x$) 也属于 G.

这时, $$F(x+\Delta x, y) - F(x,y) = \int_{M(x,y)}^{M'(x+\Delta x,y)} P(u,y)\mathrm{d}u,$$

由文献[1,2]知

$$\int_{M(x,y)}^{M'(x+\Delta x,y)} P(u,y)\mathrm{d}u = P(x+\theta\Delta x, y)\Delta x, \quad (0 < \theta < 1),$$

由此得

$$\frac{F(x+\Delta x,y) - F(x,y)}{\Delta x} = P(x+\theta\Delta x, y), \quad (0<\theta<1),$$

即 $F'_x(x,y) = P(x,y)$, $(x,y) \in G$.

类似地,可以证明:

$$F'_y(x,y) = Q(x,y), \quad (x,y) \in G.$$

或由 $F(x,y) = \int_{M_0(x_0,y_0)}^{M(x,y)} P(u,v)\mathrm{d}u + Q(u,v)\mathrm{d}v$ 及 $P(x,y)$ 在 G 内连续,得

$$F'_x(x,y) = \left(\int_{M_0(x_0,y_0)}^{M(x,y)} P(u,y)\mathrm{d}u\right)'_x = P(x,y), \quad (x,y) \in G.$$

类似地,可得

$$F'_y(x,y) = Q(x,y), \quad (x,y) \in G.$$

2 等价命题二

设 G 为空间 $O-xyz$ 内的一维单连通开区域;$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, $P'_y(x,y,z)$, $P'_z(x,y,z)$, $Q'_x(x,y,z)$, $Q'_z(x,y,z)$, $R'_x(x,y,z)$, $R'_y(x,y,z)$ 在 G 内均连续,则以下说法是等价的.

(1) $P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$ 在 G 内为某一函数 $u(x,y,z)$ 的全微分;

(2) 在 G 内,
$$Q'_x(x,y,z) = P'_y(x,y,z),$$
$$R'_x(x,y,z) = P'_z(x,y,z),$$
$$R'_y(x,y,z) = Q'_z(x,y,z);$$

(3) $\int_{\Gamma} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z = 0$,其中 Γ 为 G 内任意给定的一条光滑或分段光滑的有向简单闭曲线;

(4) 曲线积分 $\int_{\Gamma} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$ 在 G 内与积分路径无关.即对任意给定两点 $M_0(x_0,y_0,z_0), M(x,y,z) \in G$,$\Gamma_1, \Gamma_2$ 均为 G 内连结以 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为起点,以 $M(x,y,z)$ 为终点的光滑或分段光滑又本身不自交的任意给定的且满足下列条件:

① $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{M_0(x_0,y_0,z_0), M(x,y,z)\}$;

② $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 - \{M_0(x_0,y_0,z_0), M(x,y,z)\} = \{$有限个点$\}$;

③ $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 - \{M_0(x_0,y_0,z_0), M(x,y,z)\} = \{$有限个弧段$\}$;

④ $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 - \{M_0(x_0,y_0,z_0), M(x,y,z)\} = \{$有限个点$\} \cup \{$有限个弧段$\}$ 之一的两条曲线,均有

$$\int_{\Gamma_1} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$
$$= \int_{\Gamma_2} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

证明:(1)$\Rightarrow$(2).

因为 $\mathrm{d}u(x,y,z) = P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$,

所以
$$u'_x(x,y,z) = P(x,y,z),$$
$$u'_y(x,y,z) = Q(x,y,z),$$
$$u'_z(x,y,z) = R(x,y,z).$$

由 $P_y'(x,y,z), P'_z(x,y,z), Q'_x(x,y,z), Q'_z(x,y,z), R'_x(x,y,z), R_y'(x,y,z)$ 在 G 内均连续,得 $u_{xy}''(x,y,z), u_{xz}''(x,y,z), u_{yx}''(x,y,z), u_{yz}''(x,y,z), u_{zx}''(x,y,z), u''_{zy}$ 在 G 内均连续.

故当 $(x,y,z) \in G$ 有
$$u_{xy}''(x,y,z) = u_{yx}''(x,y,z);$$
$$u_{xz}''(x,y,z) = u_{zx}''(x,y,z);$$
$$u_{yz}''(x,y,z) = u_{zy}''(x,y,z).$$

即在 G 内有
$$P_y'(x,y,z) = Q_x'(x,y,z);$$
$$P_z'(x,y,z) = R_x'(x,y,z);$$
$$Q_z'(x,y,z) = R_y'(x,y,z).$$

证明:(2)$\Rightarrow$(3)

由条件知

$$\int_{\Gamma^+} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$
$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) & R(x,y,z) \end{vmatrix},$$

式中:Σ 为 G 内以 Γ 为边界的有向光滑或分片光滑的曲面.

由(2)知

$$\int_{\Gamma} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$
$$= \iint_{\Sigma} 0\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 0\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

(3)$\Rightarrow$(4) 类同等价命题一中的(3)$\Rightarrow$(4).

证明:(4)$\Rightarrow$(1).

由 $F(x,y,z) = \int_{M_0(x_0,y_0,z_0)}^{M(x,y,z)} P(u,v,t)\mathrm{d}u + Q(u,v,t)\mathrm{d}v + R(u,v,t)\mathrm{d}t$ 及 $P(x,y,z)$ 在 G 内连续,得当 $(x,y,z) \in G$ 时,

$$F'_x(x,y,z) = \left(\int_{M_0(x_0,y_0,z_0)}^{M(x,y,z)} P(u,y,z)\mathrm{d}u\right)'_x$$
$$= P(x,y,z).$$

类似地,可得:当 $(x,y,z) \in G$ 时,
$$F'_y(x,y,z) = Q(x,y,z),$$
$$F'_z(x,y,z) = R(x,y,z).$$

参考文献:

[1] 侯双印.第一积分中值定理的推广[J].郑州工学院学报,1988,9(1):62-70.

[2] 侯双印,侯双根.高等数学 30 专题的研究[M].西安:陕西科学技术出版社,1995.

[3] 菲赫金哥尔茨·T M.微积分学教程[M].路见可,译.北京:人民教育出版社,1980.

The Strict and Concise Proofs of Two Equivalent Propositions

CHEN Jian-Mei[1], HOU Hai-Sen[2]

(1. College of Mathematics, Physics & Mechanics, Zhengzhou University of Technology, Zhengzhou 450002, China; 2. Zhengzhou Headwaters Factory, Zhengzhou Running Water Company, Zhengzhou 450002, China)

Abstract: This paper proposes two equivalent propositions concerning multivariable calculus. On one hand, the two equivalent propositions are wider in conditions and more convenient in calculation so this improves their use value Onthe other hand, this paper gives concise and new proofs of these two equivalent propositions.

Key words: whole differential; integral routes; having direction's smooth or (sectionally) unilaterally smooth (curves) cambers