

文章编号 :1007-649X(2000)02-0085-03

层次分析法(AHP)比例标度的分析与改进

张晨光, 吴泽宁

(郑州工业大学水利与环境工程学院, 河南 郑州 450002)

摘 要 :简述了层次分析法(AHP)的发展背景和基本的方法步骤,指出传统 1-9 标度方法由于其方法上的局限性可能会导致与实际不符,因此有必要改进标度方法.将指标分为数量性指标和非数量性指标两种情况,提出了标度的改进方法.在指标是非数量性指标的情况下,对 3 种新的标度方法进行比较,并分析了各自的精度.在指标是数量性指标的情况下,可利用一标度函数来构造满足一致性要求的判断矩阵.对文献[3]中提出的标度函数进行了改进,并对改进后的构造函数进行了合理性验证.

关键词 :层次分析法 ;比例标度 ;判断矩阵 ;标度函数

中图分类号 :O 223 文献标识码 :A

0 引言

随着系统工程科学的发展,人们在社会的各个领域广泛应用了系统工程的观点,特别是在经济发展规划、能源需求预测和供应规划等方面.过去,人们一直靠建立复杂的数学模型来进行各种决策.但系统工程毕竟是一门边缘科学,大量复杂的系统是很难完全用定量的数学模型解决的^[1].追求建立一个完全精确的模型,其结果必然是解题十分复杂,耗资巨大.在此背景下,人们开始认识到数学工具并非是万能的,决策中总会有大量无法定量表示的因素,在决策过程中起决定性作用的是决策者的选择和判断.美国运筹学家 T. L. Saaty 教授于 70 年代提出了著名的层次分析法(The Analytic Hierarchy Process,简称 AHP).它是一种将定量与定性相结合,将人的主观判断用数量形式表达和处理的多准则决策方法,改变了长期以来决策者与决策分析者之间各行其是状况.在大部分情况下,决策者可直接使用 AHP 进行决策,提高了决策的有效性、可靠性和可行性. AHP 自 80 年代引入我国后,在我国能源系统分析、城市规划、经济管理等诸多领域得到了广泛的应用.

1 AHP 简介

1.1 AHP 的基本方法与步骤

运用 AHP 进行决策时,步骤如下^[2]:

(1)分析问题.把复杂问题分解为若干元素,把元素按属性分成若干组,以形成不同层次,为建立递阶层次结构做准备.

(2)建立递阶层次结构.建立的结构通常有目标层、准则层和方案层 3 类层次.通过建立递阶层次结构,可以把问题系统化、条理化、层次化.

(3)构造两两比较判断矩阵.用比例标度将决策者的判断量化,这一步直接影响决策结果.

(4)计算单一准则下元素的相对权重.

(5)层次总排序.得到各个方案对目标层的合成权重,并进行排序,为决策提供依据.

1.2 传统 1-9 标度的不足

构造两两判断矩阵是将人的比较判断量化的过程,受人的主观因素影响很大,而判断矩阵又是权重排序的基础,对最终的总排序有决定性的影响.因此,构造判断矩阵是 AHP 中的非常重要的一步.在构造判断矩阵时,首先要进行两两比较,这时要反复回答:对某一准则 C,两个元素 A_i 和 A_j 哪个重要,重要多少,需要对重要程度赋予一定的数值,这就是比例标度. Saaty 建议使用 1-9 标度^[2],其特点是简单明了,即使是缺少专门知识和训练的人也能够进行.但是,在实际应用中,1-9 标度却具有明显的不足之处.例如当 A_1 稍优于 A_2 时,按 1-9 标度,其权重比为 3:1,即前者的重要程度是后者的 3 倍.这与评判者的“稍优”

收稿日期 :1999-10-15,修订日期 :1999-11-20

基金项目 :国家 95 攻关子专题(98-928-02-01)

作者简介 :张晨光(1976-),男,安徽省蚌埠市人,郑州工业大学硕士研究生.

万方数据

的实际想法不尽相符. 据调查, 人们对于“差不多”、“稍优”、“优”、“甚优”和“极优”的期望值分别为 1, 1.30, 1.77, 2.40, 3.63^[2,3]. Saaty 提出的 1-9 的评判标度系统与人们头脑中的实际标度系统并非一致, 并且, 这种非一致性有可能破坏最后的方案排序优选. 因此, 笔者在以往的标度研究成

果的基础上, 分不同情况对标度进行了改进.

2 非数量性指标的比例标度

当作为评价准则的指标是非数量性指标时, 建议采用 9/9-9/1, 10/10-18/2, 指数标度 3 种新标度. 意义如表 1 所示.

表 1 不同标度值及其含义

重要程度	9/9-9/1 标度	10/10-18/2 标度	指数标度	1-9 标度
相同	9/9(1)	10/10(1)	9 ^{0/9} (1)	1
稍微重要	9/7(1.286)	12/8(1.50)	9 ^{1/9} (1.277)	3
明显重要	9/5(1.800)	14/6(2.33)	9 ^{2/9} (2.080)	5
强烈重要	9/3(3.000)	16/4(4.00)	9 ^{4/9} (4.327)	7
极端重要	9/1(9.000)	18/2(9.00)	9 ^{8/9} (9)	9
通式	9/ <i>K</i> (10- <i>K</i>)	(9+ <i>K</i>)/(11- <i>K</i>)	9 ^{1/<i>K</i>}	
<i>K</i> 的取值范围	1~9	1~9	0~9	1~9

例 1: 设某方案优选中已建立的递阶层次结构如图 1 所示. 分别用 4 种不同的标度计算判断矩阵 *A* 的最大特征根 λ_{\max} 和一致性指标 C. I., 以比较 4 种标度的优劣. 各标度的判断矩阵见表 2~5. 计算得不同比例标度计算结果见表 6.

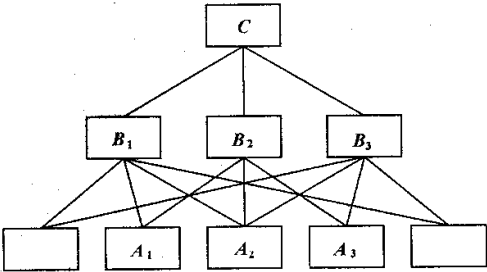


图 1 递阶层次结构图

表 2 1-9 标度的判断矩阵

<i>B</i> ₂	<i>A</i> ₁	<i>A</i> ₂	<i>A</i> ₃
<i>A</i> ₁	1	3	5
<i>A</i> ₂	1/3	1	3
<i>A</i> ₃	1/5	1/3	1

表 3 9/9-9/1 标度的判断矩阵

<i>B</i> ₂	<i>A</i> ₁	<i>A</i> ₂	<i>A</i> ₃
<i>A</i> ₁	1	9/7	9/5
<i>A</i> ₂	7/9	1	9/7
<i>A</i> ₃	5/9	7/9	1

表 4 10/10-18/2 标度的判断矩阵

<i>B</i> ₂	<i>A</i> ₁	<i>A</i> ₂	<i>A</i> ₃
<i>A</i> ₁	1	12/8	14/6
<i>A</i> ₂	8/12	1	12/8
<i>A</i> ₃	6/14	8/12	1

表 5 指数标度的判断矩阵

<i>B</i> ₂	<i>A</i> ₁	<i>A</i> ₂	<i>A</i> ₃
<i>A</i> ₁	1	1.277	2.080
<i>A</i> ₂	0.783	1	1.277
<i>A</i> ₃	0.481	0.783	1

表 6 不同比例标度计算指标比较

标度	λ_{\max}	C. I.	权重 <i>W</i>
1-9 标度	3.038	0.0192 (0.608 0.292 0.10) ^T	
9/9-9/1 标度	3.001	0.0004 (0.430 0.325 0.245) ^T	
10/10-18/2 标度	3.000	0 (0.478 0.315 0.207) ^T	
指数标度	3.006	0.0032 (0.446 0.322 0.232) ^T	

从表 6 中可以看出, 4 种标度中, 10/10-18/2 标度的 C. I. 最小, 因而精度最好, 9/9-9/1 标度次之, 1-9 标度最差.

3 数量性指标的比例标度

数量性指标之间比较重要性时, 指标值就是判断其重要性的基础或基本依据. 可以充分利用统计数据量信息来构造判断矩阵. 设层次模型中某一层有 *A*₁, *A*₂, ..., *A*_{*n*}, *n* 个元素, 其评价准则为数量性指标 *C*; 各元素的指标值为 *a*₁, *a*₂, ..., *a*_{*n*}. 以 *A*_{*i*}/*A*_{*j*} 表示 *A*_{*i*} 比 *A*_{*j*} 重要程度, 其标度为 *b*_{*ij*}, 表示 *A*_{*i*} 比 *A*_{*j*} 重要 *b*_{*ij*} 倍. 又设 *A*_{*i*} 与 *A*_{*j*} 的 *C* 指标值之比为 *a*_{*i*}/*a*_{*j*} = *k*_{*ij*}.

一般情况下, *b*_{*ij*} ≠ *k*_{*ij*}, 但 *k*_{*ij*} 是 *A*_{*i*} 与 *A*_{*j*} 元素的 *C* 指标值的客观反映, 因此, *k*_{*ij*} 就成为 *A*_{*i*} 与 *A*_{*j*} 的相对重要程度的客观依据. 则标度函数可表示为

$$b_{ij} = f(k_{ij}),$$

用上式可以通过有确定数值的 *C* 指标值来确定标度的大小. 由判断矩阵的性质, 可得该函数应具有 3 个性质^[3]: ①当 *k*_{*ij*} = 1 时, *b*_{*ij*} = 1; ② *k*_{*ji*} = 1/*k*_{*ij*} 时, *b*_{*ji*} = 1/*b*_{*ij*}; ③ *a*_{*i*}/*a*_{*l*} = *k*_{*il*} ⇒ *A*_{*i*}/*A*_{*l*} = *b*_{*il*}, 则有

$$k_{ij} = \frac{a_i}{a_j} = \frac{a_i/a_l}{a_j/a_l} = \frac{k_{il}}{k_{jl}} \Rightarrow A_i/A_j = b_{ij} = \frac{b_{il}}{b_{jl}}.$$

根据以上 3 个性质, 拟定标度函数

$$b_{ij} = b^{\frac{\ln(k_{ij}^p)}{\ln k}},$$

其中 k 为全部元素中 C 指标的最大值与最小值之比; b 为与 k 相对应的元素相对重要程度的标度; p 为调整系数.当选取准则为指标值越大越好时,取值 1;反之取为 -1 .

验证拟定的标度函数是否满足 3 个性质.

①若 $k_{ij} = 1$, $\ln k_{ij} = \ln 1 = 0$,所以 $b_{ij} = 1$;

②因 $k_{ji} = \frac{1}{k_{ij}}$,所以

$$b_{ji} = b\left(\frac{\ln(k_{ji}^p)}{\ln k}\right) = b\left(\frac{\ln(k_{ij}^{-p})}{\ln k}\right) = b\left(-\frac{\ln(k_{ij}^p)}{\ln k}\right) = \frac{1}{b_{ij}};$$

③因为 $\frac{k_{il}}{k_{jl}} = \frac{a_i/a_l}{a_j/a_l} = \frac{a_i}{a_j} = k_{ij}$,所以

$$\frac{b_{il}}{b_{jl}} = \frac{b\left(\frac{\ln(k_{il}^p)}{\ln k}\right)}{b\left(\frac{\ln(k_{jl}^p)}{\ln k}\right)} = b\left(\frac{\ln(k_{il}^p)}{\ln k} - \frac{\ln(k_{jl}^p)}{\ln k}\right) = b\left(\frac{\ln\left(\frac{k_{il}^p}{k_{jl}^p}\right)}{\ln k}\right) = b\left(\frac{\ln(k_{ij}^p)}{\ln k}\right) = b_{ij}.$$

证明该标度函数满足判断矩阵要求的 3 个性质.

算例:设某工程要选用一种材料,要求在体积相同时重量越轻越好,但同时要兼顾强度.现有 3 种材料 C_1, C_2, C_3 可供选择,其单位体积的重量为 3,5,7,强度为 10,15,25.要求优选方案.

解:建立递阶层次结构图如图 2.

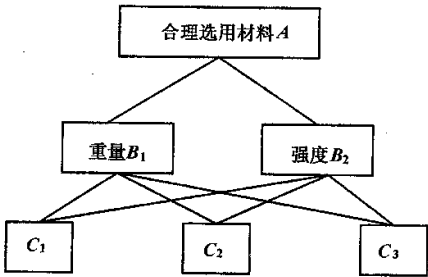


图 2 递阶层次结构图

最大的 B_1 指标值之比为

$$k_1 = \frac{g(C_3)}{g(C_1)} = \frac{7}{3} = 2.333.$$

与其相对应的标度定为 5.即对于准则 B_1 , C_1 比 C_3 明显重要.因为选择材料的原则是重量越轻越好,所以取 $P = -1$.分别算出标度见表 7.

表 7 B_1 准则下的判断矩阵

B_1	C_1	C_2	C_3	$ W $
C_1	1.000	2.639	5.000	0.633
C_2	0.379	1.000	1.895	0.240
C_3	0.200	0.527	1.000	0.127

经计算, $\lambda_{\max} = 3.000$; $C.I. = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} = 0$.

故判断矩阵的一致性非常好,可在数量性指标比较时采用.

4 结束语

本文对层次分析的比例标度进行了分析、归纳,把指标分数量指标和非数量指标两种不同的情况加以讨论,提供了两类情况下构造判断矩阵的方法.但在实际应用中,纯粹的数量性指标的情况不多见,有时可能在同一个问题中既有数量指标又有非数量指标,这时可将处理数量指标和非数量指标的方法结合使用.

参考文献:

[1] 贺北方,吴泽宁,杨建水.复杂系统的灰色综合评价研究[J].郑州工业大学学报,1999,20(1):50~53.
[2] 王连芬,许树柏.层次分析法引论[M].北京:中国人民大学出版社,1990.
[3] 中国系统工程学会层次分析法专业学组.决策科学与层次分析法[M].青岛:青岛海洋大学出版社,1992.

Improvement and Analysis of Scale of AHP

ZHANG Chen-guang, WU Ze-ning

(College of Hydraulic & Environmental Engineering Zhengzhou University of Technology Zhengzhou 450002, China)

Abstract: This paper describes the basic method and developing background of AHP and also points out that the conventional 1-9 methods of scale have some shortages which may lead to deviation from the fact, so it improves the methods of scale according to two different conditions. Firstly, it compares three new methods of scale and their accuracy; secondly, it points out that the satisfactory judgement matrix can be constructed by an index function and improved one index function told by reference[3], then validated the rationality of the function.

Key words: AHP; scale; judgment matrix; index function