

文章编号 :1007 - 649X(2000)03 - 0019 - 04

三角点或四角点支承的矩形板弯曲统一求解方法

许琪楼,姜 锐,唐国明

(郑州工业大学土木建筑工程学院,河南 郑州 450002)

摘 要 :提出一种新的挠度表达式,可以解决三角点支承的矩形板在任意荷载作用下的弯曲.该挠度表达式反映板边界条件所能激发出的双向弯曲变形形态,所采用的三角级数在相应区间上具有正交性,并自然满足支承角点处的位移条件.分别计算荷载作用下和自由角点单位集中力作用下三角点支承矩形板的弯曲解,采用叠加法即可解决四角点支承的矩形板在任意荷载作用下和支承角点发生任意位移时的弯曲,后者与理论解答完全相同.这种解法求解思路清晰,收敛速度快,计算精度高.

关键词 :弹性薄板弯曲;矩形板;统一解法

中图分类号 :TU 339 文献标识码 :A

图1所示边长为 a, b 的矩形板,三角点或四角点支承.本文所提出的统一解法可以解决这二种矩形板在任意荷载作用下和角点支承发生任意支座沉陷时的弯曲.

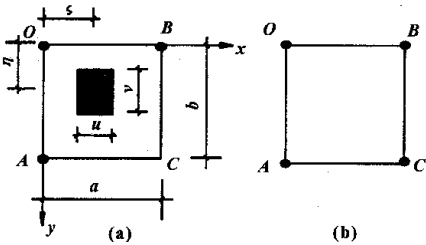


图1 三角或四角点支承的矩形板

1 三角点支承的矩形板

1.1 板面荷载作用

在板面法向荷载作用下,挠度应满足下列平衡微分方程^[1]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (1)$$

式中: D 为板的抗弯刚度, $D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$; E, μ 分别为板的弹性模量及泊松比; t 为板厚.

w 还应满足自由角点 C 处的反力条件:

$$R_c = - (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Big|_{x=a, y=b} = 0, \quad (2)$$

设 $w = w_1 + w_2, \quad (3)$

w_1 和 w_2 分别为方程(1)对应的齐次微分方程的通解和特解. w_1 主要与板的边界条件有关.为表示板的双向弯曲变形和对应板的8个边界条件,取 w_1 为包含8个待定常数的双向单三角级数^[2]:

$$w_1 = \sum_{m=1,3,5} (A_m \text{sh} \alpha y + B_m \text{ch} \alpha y + C_m \alpha y \text{sh} \alpha y + D_m \alpha y \text{ch} \alpha y) \sin \alpha x + \sum_{n=1,3,5} (E_n \text{sh} \beta x + F_n \text{ch} \beta x + G_n \beta x \text{sh} \beta x + H_n \beta x \text{ch} \beta x) \sin \beta y + R_0 + R_1 x + R_2 y, \quad (4)$$

式中: $\alpha = m\pi/(2a); \beta = n\pi/(2b); A_m, B_m, C_m, D_m, E_n, F_n, G_n, H_n$ 为8个待定常数; R_0, R_1, R_2 可由 O, A, B 三角点的挠度条件确定,设 $\Delta_O, \Delta_A, \Delta_B$ 分别为 O, A, B 三角点的支座沉陷值,有

$$R_0 = \Delta_O; \quad (5)$$

$$R_1 = - \frac{1}{a} \sum_{m=1,3,5} B_m \sin \frac{m\pi}{2} + \frac{\Delta_B - \Delta_O}{a}; \quad (6)$$

$$R_2 = - \frac{1}{b} \sum_{n=1,3,5} F_n \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{\Delta_A - \Delta_O}{b}, \quad (7)$$

级数 $\sum_{m=1,3,5} \sin \frac{m\pi x}{2a}$ 在 $x=0$ 时为零值,在 $x=a$ 时不为零值,符合三角点支承的矩形板在 $x=0$ 边界上挠度小,在 $x=a$ 的边界上挠度大的变形特点.同理,级数 $\sum_{n=1,3,5} \sin \frac{n\pi y}{2b}$ 也有类似的特点.它们分别在 $[0, a]$ 和 $[0, b]$ 区间上具有下列正交性:

收稿日期 2000 - 03 - 01, 修订日期 2000 - 04 - 10

基金项目 河南省自然科学基金资助项目(964032500)

作者简介 许琪楼(1944 -)男,山西省长治县人,郑州工业大学教授,硕士,主要从事钢结构、工程抗震及工程弹性力学方面的研究.

当 i, j 为任意正奇数时,有

$$\int_0^a \sin \frac{i \pi x}{2 a} \sin \frac{j \pi x}{2 a} \mathrm{d} x=\left\{\begin{array}{ll} 0 & (i \neq j) \\ \frac{a}{2} & (i=j) \end{array}\right. ; \quad(8)$$

$$\int_0^b \sin \frac{i \pi y}{2 b} \sin \frac{j \pi y}{2 b} \mathrm{d} y=\left\{\begin{array}{ll} 0 & (i \neq j) \\ \frac{b}{2} & (i=j) \end{array}\right. . \quad(9)$$

该式切合三角点支承的边界条件所激发的弯曲变形形态,满足支承角点处的挠度条件并符合角点支座沉陷仅使板发生刚体位移的变形特点.

特解 w_2 主要与荷载有关,满足平衡微分方程的特解有很多形式,但仅有以下 2 种形式适用.

1.1.1.1 w_2 采用双重三角级数

w_2 采用双重三角级数时,首先要将 $q(x, y)$ 展开成双重三角级数,级数形式必须与 w_1 中的级数相同,以使 w_2 也切合边界条件所激发的弯曲变形形态,设

$$q(x, y)=\sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,3,5} S_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}, \quad(10)$$

其中,

$$S_{mn}=\frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m \pi x}{2 a} \sin \frac{n \pi y}{2 b} \mathrm{d} x \mathrm{d} y . \quad(11)$$

设 $w_2=\sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,3,5} R_{mn} \sin \frac{m \pi x}{2 a} \sin \frac{n \pi y}{2 b} ; \quad(12)$

$$R_{mn}=\frac{S_{mn}}{D\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2}, \quad(13)$$

当 $q(x, y)=q$ 时,

$$w_2=\frac{16 q}{\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,3,5} \frac{1}{m n\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2} \sin \frac{m \pi x}{2 a} \sin \frac{n \pi y}{2 b} . \quad(14)$$

当 $q(x, y)=\frac{q x}{a}$ 时,

$$w_2=\frac{32 q}{\pi^3 D} \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,3,5} \frac{(-1)^{\frac{m+3}{2}}}{m^2 n\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2} .$$

表 1 计算结果($\Delta_0=\Delta_A=\Delta_B=0$)

计算点	类别	$q(x, y)=q$		$q(x, y)=q x / a$		荷载 3		荷载 4	
		本文值	有限元值	本文值	有限元值	本文值	有限元值	本文值	有限元值
1	w	0.0706	0.0711	0.0428	0.0430	0.0200	0.0202	0.0837	0.0853
	M_x	0.1131	0.1123	0.0569	0.0561	0.0494	0.0497	-	-
	M_y	0.1131	0.1123	0.0564	0.0561	0.0494	0.0497	-	-
C	w	0.1786	0.1851	0.1191	0.1205	0.0447	0.0458	0.1786	0.1832
O	R	-0.0491	0*	-0.0982	-0.0833*	-0.0101	0*	-0.0564	0*
A	R	0.4936	0.5*	0.2486	0.2500*	0.1238	0.1250*	0.4873	0.5000*
B	R	0.4936	0.5*	0.3291	0.3333*	0.1234	0.1250*	0.4873	0.5000*

说明:反力向上为正,带*者为理论反力值.

表中的支反力是由挠度的变化率进行计算

$$\sin \frac{m \pi x}{2 a} \sin \frac{n \pi y}{2 b} . \quad(15)$$

在图 1(a)所示阴影区作用均布荷载 q 时,

$$w_2=\frac{64 q}{\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,3,5} \frac{\sin \frac{m \pi \zeta}{2 a} \sin \frac{m \pi u}{4 a} \sin \frac{n \pi \eta}{2 b} \sin \frac{n \pi v}{4 b}}{m n\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2} \sin \frac{m \pi x}{2 a} \sin \frac{n \pi y}{2 b} ; \quad(16)$$

在 $x=\zeta, y=\eta$ 点上作用集中荷载 P 时,有

$$w_2=\frac{4 P}{a b D} \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,3,5} \frac{\sin \frac{m \pi \zeta}{2 a} \sin \frac{n \pi \eta}{2 b}}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2} \sin \frac{m \pi x}{2 a} \sin \frac{n \pi y}{2 b} . \quad(17)$$

w_2 满足式(2)所示的自由角点条件,利用边界条件和级数的正交性可求得求解待定常数的线性方程组.

因为 w_1 和 w_2 中采用了相同的级数形式,级数 $\sum_{m=1,3,5} \sin \frac{m \pi x}{2 a}$ (或 $\sum_{n=1,3,5} \sin \frac{n \pi y}{2 b}$) 在 $x=0$ (或 $y=0$) 的边界上零阶导数和二阶导数为零值,在 $x=a$ (或 $y=b$) 的边界上一阶导数和三阶导数为零值,致使在 $x=0$ (或 $y=0$) 的边界上对应二阶导数的边界条件为精确方程,在 $x=a$ (或 $y=b$) 的边界上对应三阶导数的边界条件为精确方程.精确方程的左端系数项不包含任一非三角函数的展开系数,右端项为零值.

算例 1:正方形板, $\mu=0.3$.表 1 列出 4 种荷载作用下板中点(1 点)和自由角点 C 的挠度系数和弯矩系数以及 O, A, B 三角点的支反力系数,并与有限元值或理论反力值进行比较.表中荷载 3 为以 $x=a / 2, y=b / 2$ 为中心, $u=a / 2, v=b / 2$ 范围内作用均布荷载 q 的情况,荷载 4 为在板中心作用集中荷载的情况.计算时取级数前 3 项.

的 相比之下 O 点支反力收敛略慢.可见双重三

角级数特解可以解决板面作用任意荷载时的弯曲,但在集中荷载作用下荷载作用点处的弯矩不收敛^[3].

1.1.2 w_2 采用 x, y 的多项式

特解 w_2 也可以采用 x, y 的多项式,除满足式(1)和式(2)的条件外,还应与双重三角级数特解满足相同的条件,即 w_2 在 $x = a$ (或 $y = 0$) 的边界上满足弯矩为零的边界条件,在 $x = a$ (或 $y = b$) 的边界上满足剪力为零的边界条件.

当 $q(x, y) = q$ 时,取

$$w_2 = \frac{q\mu}{8D(\mu - 1)}[(x^2 - 2ax)(y^2 - 2by) - \frac{1}{6\mu}(y^4 + x^4 - 4by^3 - 4ax^3 + 3b^3y + 3a^3x)] ; \tag{18}$$

当 $q(x, y) = \frac{qx}{a}$ 时,取

$$w_2 = \frac{\mu(\mu - 2)q}{24Da(\mu - 1)^2}[(x^3 - 3a^2x)(y^2 - 2by) - \frac{x}{2(2 - \mu)}(y^4 - 4by^3 + 8by) - \frac{1}{10\mu}(x^5 - 10a^2x^3 + 9a^4x)] . \tag{19}$$

由此得 4 个精确方程保持不变,其他边界条件对应的方程左端系数项不变,右端常数项由新的特解确定.

取级数前 3 项计算,结果与表 1 所示值相同.但多项式特解无法计算板面作用局部分布荷载或

集中荷载的情况,因为无法找到一个满足平衡微分方程,自由角点条件及前述边界条件的多项式.

1.2 板边荷载作用

当在边界上作用分布弯矩、局部分布弯矩、集中弯矩或作用分布剪力、局部分布剪力、集中力时,挠度 w 应满足式(1)对应的齐次微分方程及式(2)所示的自由角点条件^[4],这时可利用通解 w_1 和边界条件直接求解.设在自由边 $x = a$ 边界上作用向下的均布剪力 q 时,对应的边界条件变为 $x = a$ 时, $v_x = q$,则求解待定常数的线性方程左端系数项不变,该边界条件对应方程的右端项见表 2 所示.

表 2 自由边 $x = a$ 边界上作用荷载时方程右端项

全长作用 向下均布 剪力 q	$y = y_0$ 为中心,长度为 v 的范围内作用向下 局部均布剪力 q	$y = y_0$ 处作 用向下集 中力 P
$-\frac{2q}{\beta bD}$	$-\frac{8q}{n\pi D} \sin \frac{n\pi y_0}{2b} \sin \frac{n\pi v}{4b}$	$-\frac{2P}{D_b} \sin \frac{n\pi y_0}{2b}$

当在自由边 $x = a$ 的边界上, $y = y_0$ 为中心,长度为 v 的范围内作用向下的均布剪力 q 时,或在 $x = a$ 的边界上 $y = y_0$ 处作用向下的集中力 P 时,将其转换为全长等效的分布剪力,方程右端项见表 2 所示.

算例 2 :正方形板, $\mu = 0.3$,表 3 列出在自由边 $x = a$ 上作用向下剪力时板中点(1 点)和自由角点 C 的挠度系数和弯矩系数以及支承角点 O, A, B 的支反力系数,表中 k 为级数的取项数,结果与有限元值或理论反力值吻合.

表 3 自由边 $x = a$ 上作用向下剪力时计算结果($\Delta_0 = \Delta_A = \Delta_B = 0$)

计算点	类别	全长均布剪力 q		$y = b/2$ 为中心, $v = b/2$ 范围 内作用均布剪力 q		$y = b/2$ 处作用集中力	
		本文值 $k = 7$	有限元值	本文值 $k = 5$	有限元值	本文值 $k = 5$	有限元值
1	w	0.1040	0.1056	0.0550	0.0550	0.1129	0.1149
	M_x	-0.0121	-0.0113	-0.0094	-0.0100	-0.0226	-0.0251
	M_y	0.0997	0.0996	0.0719	0.0693	0.1588	0.1613
C	w	0.3572	0.3630	0.1781	0.1794	0.3609	0.3664
O	R	-0.5033	-0.5*	-0.2490	-0.25*	-0.5134	-0.5*
A	R	0.5000	0.5*	-0.2527	-0.25*	0.5050	0.5*
B	R	0.9699	1.0*	0.4988	0.5*	0.9903	1.0*

说明:反力向下为负值,带*者为理论反力值.

1.3 自由角点作用集中力

图 1(a)所示的矩形板,在自由角点 C 作用向下的单位力时,挠度 w 应满足式(1)对应的齐次微分方程和下式所示角点条件:

$$R_c = -2D(1 - \frac{\mu}{2}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Big|_{x=a, y=b} = -1 , \tag{20}$$

设 $w = w_1 + w_2$, w_1 为通解,仍取式(4)的形式, w_2 为特解,取

$$w_2 = \frac{xy}{2(1 - \mu)D} , \tag{21}$$

由此得 8 个方程的右端项全部为零值,即 8 个待定常数全为零.有

$$w = \frac{xy}{2(1-\mu)D} + \Delta_0 + \frac{(\Delta_B - \Delta_0)x}{a} + \frac{(\Delta_A - \Delta_0)y}{b} \quad (22)$$

当 $\Delta_0 = \Delta_A = \Delta_B = 0$ 时,对 $\mu = 0.3$ 的方板中点挠度系数为 0.1786(有限元值为 0.1815),自由角点挠度系数为 0.7143(有限元值为 0.7262),板内各点的弯矩、剪力均为零值,与有限元结果相符.自由角点的集中力无法展式(10)所示的双重三角级数的形式, w_2 无法采用双重三角级数特解.

2 四角点支承的矩形板

四角点支承的矩形板在任意荷载作用下的弯曲可以采用叠加法计算,即撤去 C 角点支座而代之以未知力 R ,分别计算三角点支承的矩形板在原荷载和 C 角点单位集中力作用下的弯曲,由角点 C 在支座方向位移条件:挠度为零或等于确定的支座沉陷值,求出角点支反力 R ,利用叠加法可求出原结构体系的弯曲解.

对图 1(b)所示的四角点支承的矩形板,当角点 O, A, B 分别发生支座沉陷 $\Delta_0, \Delta_A, \Delta_B$ 时,撤去 C 角点支座而作用一向下的未知力 R ,由式(22)可知板的挠度为

$$w = \frac{Rxy}{2(1-\mu)D} + \Delta_0 + \frac{(\Delta_B - \Delta_0)x}{a} +$$

$$\frac{(\Delta_A - \Delta_0)y}{b} \quad (23)$$

由 C 角点的位移条件: $x = a$ 和 $y = b$ 时, $w = \Delta_C$, 得 $R = \frac{2D(1-\mu)(\Delta_C + \Delta_0 - \Delta_B - \Delta_A)}{ab}$,

将 R 代入式(23),得四角点发生任意支座沉陷时的解答为:

$$w = \Delta_0 + \frac{(\Delta_B - \Delta_0)x}{a} + \frac{(\Delta_A - \Delta_0)y}{b} + \frac{(\Delta_C + \Delta_0 - \Delta_A - \Delta_B)xy}{ab} \quad (24)$$

式(24)满足平衡微分方程及所有边界条件和角点条件,而角点反力也可以由式(24)进行计算.

参考文献:

- [1] 铁摩辛柯 S. 板壳理论[M]. 板壳理论翻译组,译. 北京: 科学出版社,1977.
- [2] 许琪楼,姬同庚. 二邻边支承其余边自由矩形板在均布荷载作用下的弯曲解[J]. 土木工程学报,1995, 28(3): 32-41.
- [3] 姜 锐,许琪楼,李 芳. 一对边支承另一对边自由的矩形板弯曲[J]. 郑州工业大学学报,1998,19(4): 46-50.
- [4] 许琪楼,姜 锐,唐国明. 一边简支一角点或二角点支承的矩形板弯曲统一求解方法[J]. 郑州工业大学学报,1998,19(1): 52-59.

United Solution Method on Rectangular Plate Bending with Three Corner Points Resting or Four Corner Points Resting

XU Qi-lou, JIANG Rui, TANG Guo-ming

(College of Civil & Building Engineering Zhengzhou University of Technology Zhengzhou 450002, China)

Abstract: In this paper, a new deflection expression is put forward, which can solve the rectangular plate bending with three corner points sustained under arbitrary load. This expression reflects the bending characteristics aroused by the boundary condition and satisfies the displacement condition at the sustained corner points. The triangular series in the expression are orthogonal at the correspondent region. Calculating the plate bending under load and under the unit center force at the free corner points, then the rectangular plate bending with four corner points sustained under arbitrary load or when the sustained points have arbitrary displacement can be solved using superposition method, and the latter is correspondent to the theoretical solution. The method has the advantage of clear thinking rapidly converging and high precision.

Key words: elastic plate; bending; rectangular plate; united solution