

文章编号 :1007 - 649X(2001)01 - 0043 - 03

# 平铰拱桥受力分析的迭代法

卞 华 , 欧 莉

( 株洲工学院土木工程系 湖南 株洲 412008 )

摘 要 : 平铰拱桥结构的受力分析属于边界非线性力学问题 , 目前的一些方法受力分析不太明确 , 对变截面、复杂形状截面等平铰拱桥无法进行计算 . 针对这种情况 , 提出了确定平铰截面抗力系数  $K$  的新方法 , 建立了计算平铰拱桥内力的迭代算法 , 并进行了实例计算 , 研究结果表明 , 这一方法对具有任意个平铰、任意形状截面的拱桥结构是适用的 .

关键词 : 平铰 ; 非线性 ; 抗力系数 ; 迭代算法

中图分类号 : TU 311 文献标识码 : A

## 0 引言

在一般的拱桥设计中 , 大都采用了平铰的概念 , 对平铰拱桥提出合理实用的受力分析方法 , 是拱桥设计和施工以及评估开裂圯工拱桥的承载能力时迫切需要解决的问题 , 但目前的解法受力分析不够明确 , 且采用手工算法 , 对变截面、截面形状复杂等平铰拱无法进行计算 . 例如无铰拱( 视拱趾为固定支承 ) 或双铰拱( 视拱趾为铰支 ) 模型算法<sup>[1]</sup> , 当拱趾上缘出现裂缝时 , 按设计规范 , 在截面偏心距不超过规定值时 , 可保持拱趾受力状态不变 , 而考虑材料的塑性进行“ 应力重分布 ” 计算 . 但是拱趾截面上缘既已开裂 , 拱趾的固结条件就不能保证 , 支承条件的改变就会引起“ 内力重分布 ” , 即拱趾的固端弯矩值会随着裂缝的产生而相应减少 , 此时采用无铰拱或双铰拱计算都会产生较大的误差 . 本文研究了平铰的力学特性 , 提出的新方法适用于具有任意个平铰的拱桥结构的力学分析 .

## 1 平铰的力学特性

在圯工拱桥的设计和施工中 , 经常出现拱趾上缘应力大于圯工材料许用拉应力而产生裂缝的情况 , 并且施工时在拱圈拱趾和桥墩( 台 ) 的拱座间常常就设有平缝、开裂或设置平缝 , 这种固结情况统称为平铰 . 与一般铰接比较 , 平铰不能完全自

由转动 , 在转动中要受到一定程度的约束 ; 与固定支承比较 , 平铰不能承受拉应力 , 所以平铰承受的弯矩有限 . 平铰结构如图 1( a ) 所示 , 平铰截面上的应力沿高度的分布如图 1( b ) 所示 , 其合力记为  $N_p$  , 向截面中心简化后 , 拱端承受压力  $N_p$  和附加约束弯矩  $M_p$  , 如图 1( c ) 所示 ,  $K^*$  是偏心距 .

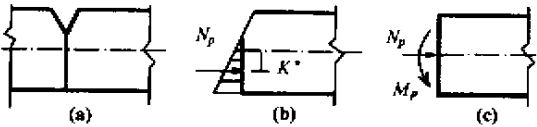


图 1 平铰的受力特点

Fig. 1 Mechanical feature of flat hinge joint

在外荷载作用下 , 平铰拱允许拱趾产生开裂 , 即允许产生微小转动 , 转角记为  $\varphi_p$  , 其大小应在铰支转角和固支转角( 为零 ) 之间 , 且与  $M_p$  的大小有关 . 分析拱中受力 , 必须先确定平铰的约束反力  $N_p$  和  $M_p$  , 它们使拱满足静力平衡条件 , 但平铰拱的受力分析属于边界非线性力学问题 , 因为支座的位移转角  $\varphi_p$  未知 , 且与  $M_p$  相关 .

## 2 平铰拱桥结构的受力计算

### 2.1 截面弹性抗力系数及其与 $N_p$ , $M_p$ 的关系

因为横截面上的转角  $\varphi$  总与该截面的弯矩  $M$  成正比 , 我们可以设定

$$M = KI\varphi \quad (1)$$

收稿日期 2000 - 11 - 01 ; 修订日期 2000 - 01 - 10

作者简介 : 卞 华 ( 1962 - ) 男 , 湖南省临澧市人 , 株洲工学院副教授 , 主要从事应用力学方面的研究 .

其中  $I$  为截面对形心轴的惯性矩  $K$  为截面弹性抗力系数,它与弹性模量  $E$  有关.以往有人取  $K = 0.4 \sim 0.6E$ ,但根据不足,我们认为可以由计算得到具体问题的常数  $K$ .将图 2(a)所示的固定拱(或称无铰拱)的弯矩记为  $M_G$ ,图 2(b)所示的铰支拱(又称双铰拱)的转角记为  $\varphi_j$ ,根据叠加原理,在  $A$  和  $B$  端有

$$\varphi_j - \frac{M_G}{KI} = 0$$
$$K = \frac{M_G}{I\varphi_j}$$

(2)

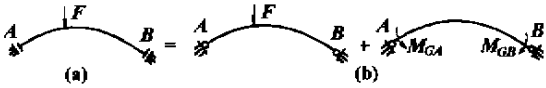


图 2 固定拱的受力叠加

Fig.2 Mechanical addition of arch without joint  
固定拱横截面上的弯曲正应力  $\sigma$  可表示成

$$\sigma = \frac{M_G y}{I} = K\varphi_j y$$

同理,运用叠加原理分析平铰拱的受力和两端转角位移,如图 3 所示,有

$$\varphi_p = \varphi_j - \frac{M_p}{KI}$$

(3)

其中  $K$  已由式(2)确定,而有人设  $\varphi_p = \varphi_j$ ,显然根据不足.

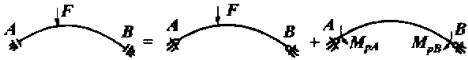


图 3 平铰的受力叠加

Fig.3 Mechanical addition of flat hinge joint  
假设  $\sigma = K\varphi_p y$ ,即平铰横截面上的正应力沿高度线性分布如图 4 所示,最大正应力  $\sigma_{\max} = K\varphi_p h$ ,合力  $N_p$  为

$$N_p = \int_A \sigma dF = \frac{1}{2} \sigma_{\max} h b = \frac{1}{2} K\varphi_p h^2 b$$

(4)

$$h = \sqrt{\frac{2N_p}{bK\varphi_p}}$$

(5)

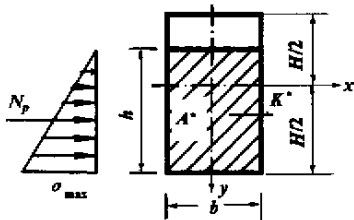


图 4 平铰横截面的应力分布

Fig.4 Stresses of cross section of flat hinge joint

万方数据

且偏心距  $K^* = \frac{H}{2} - \frac{h}{3}$ ,弯矩  $M_p = N_p \cdot K^*$ ,对于其他形状的截面,只是  $N_p = \int_A \sigma dF$  有所不同.

2.2 迭代法求解平铰拱桥内力<sup>[2]</sup>

显然  $\varphi_p, h$  与  $N_p, M_p$  是互相关联的,我们可以采用下列迭代步骤求解,最终使平铰拱桥在载荷和反力  $N_p, M_p$  的作用下达到静力平衡,又能保持平铰上产生转角  $\varphi_p$ .以矩形横截面为例进行计算.

(1) 为了分别计算对应的固定拱、铰支拱,得到  $M_G, N_G$  和  $\varphi_j$ ,并由式(2)求得  $K$  值,我们取初值  $N_{p0} = N_G, M_{p0} = M_G, \varphi_{p0} = \varphi_j$  得

$$h_1 = \sqrt{\frac{2N_{p0}}{bK\varphi_{p0}}}, K_1^* = \frac{H}{2} - \frac{h_1}{3}$$
$$M_{p1} = N_{p0} \cdot K_1^*$$

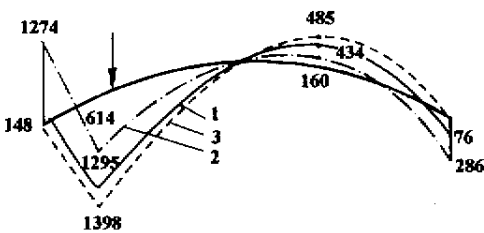
(2) 把  $M_{p1}$  作为施加外力,计算平铰拱,求出  $N_{p1}, \varphi_{p1}$  得到

$$h_2 = \sqrt{\frac{2N_{p1}}{bK\varphi_{p1}}}, K_2^* = \frac{H}{2} - \frac{h_2}{3}$$
$$M_{p2} = N_{p1} K_2^*$$

(3) 判别  $M_p$  的收敛性质应使用  $\frac{M_{p2} - M_{p1}}{M_{p1}} \leq \epsilon$  判别式,其中  $\epsilon$  为收敛精度控制值,一般可取为  $10^{-3} \sim 10^{-5}$ .

如果达到相应的精度,就可以取  $M_p = M_{p2}, N_p = N_{p1}$ ,若不满足,则未收敛,重复上述第 2 步和第 3 步,直到收敛为止.

当拱上有多个平铰时,可按同样的步骤进行计算.为了便于推广应用,我们借助杆件有限元法计算结构的内力和变形,编制了相应的计算机程序,使得上述迭代算法能够较好地适用于复杂拱桥结构和复杂载荷作用下的拱桥.



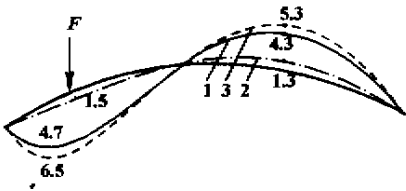
1.平铰拱 2.固定拱 3.铰支拱

图 5 平铰拱桥的弯矩图

Fig.5 Bending moment of arch bridge

3 具体算例

一拱轴曲线为圆弧的等截面两平铰拱,跨径



1.平铰拱 2.固定拱 3.铰支拱

图 6 平铰拱桥的挠度图

Fig.6 Deflection of arch bridge

32 m ,矢高 4.287 m ,圆弧半径为 32 m ,横截面为矩形 , $b = 6\text{ m}$  , $H = 0.967\text{ m}$  .材料弹性模量  $E = 9.8\text{ GPa}$  ,体积质量  $\gamma = 2.5\text{ kN/m}^3$  (考虑自重) ,集中力  $F = 400\text{ kN}$  作用在拱上距左端水平距离 4 m 处 .采用 24 个等长直杆单元 .用本文方法计算 ,分别绘出了平铰拱的弯矩和挠度曲线 ,并与固定拱和铰支拱的计算结果进行了比较 .

4 结束语

通过本方法的分析及实例计算可以看出 ,采用固定拱和铰支拱法计算 ,都会产生较大的误差 ,固定拱法得出的数据明显偏小 ,而铰支拱法得出的数据又稍稍偏大 .而有人取截面弹性抗力系数  $K = 0.4 \sim 0.6E$  ,把平铰拱支座的角位移与铰支拱支座的角位移等同 ,是产生误差的重要原因 .而本文提出的方法较好地解决了这些问题 ,结合配套的电脑软件 ,能较好地应用到工程实际计算 ,并达到相应的精度 .

参考文献 :

[1] 王世槐 . 圬工拱桥 [ M ] . 北京 : 人民交通出版社 , 1983 .  
[2] 重庆建筑工程学院 . 结构力学 [ M ] . 北京 : 人民教育出版社 , 1981 .

Iterative Approach to Mechanical Analysis of Arch Bridge

BIAN Hua , OU Li

( Department of Civil & Building Engineering Zhuzhou Institute of Technology Zhuzhou 412008 ,China )

**Abstract** :The mechanical analysis for arch bridge with flat hinge joints is a mechanical problem with non - linear boundary . Mechanical analysis of methods at present is not clear , which can not calculate the arch bridge with changeable section and section with complicate shape . In this paper , the new method used to get the section resistance coefficient  $K$  is presented , the iterative procedure is established to calculate the internal forces of arch bridge with flat hinge joints , and the computational example is given . The method can apply to the arch bridge with any numbers of flat hinge joints and any shape section .

**Key words** :flat hinge joint ; non - linearity ; resistance coefficient ; iterative procedure