文章编号：1007－6492(2001)01－0068－03

高阶导数与原函数统一性的研究

成立社[1]，罗 满[2]

（1.郑州工业大学数理力学系，河南 郑州 450002；2.河南财经学院计算机科学系，河南 郑州 450002）

摘 要：通过分析一类较为复杂函数的导数与其自身的结构特征，获得了由该类函数的一阶导数及其自身的结构特征，在不需要任何分析运算条件下，即可快速准确推知该类函数的原函数及其高阶导数的结果．研究结果表明：高阶导数与原函数这对互逆运算在该类函数中可实现统一．利用该结果可给实际运算带来许多简化与方便．

关键词：高阶导数；原函数；结构特征；统一性

中图分类号：O 172.1；O 172.2　　**文献标识码**：A

0 引言

函数的高阶导数一般是采用逐次求导法，对于简单的函数还可采用间接法．不论采用哪种方法求高阶导数，均要经过繁琐的运算，甚至还需经过一系列的技巧，再经过归纳得出其高阶导数的一般公式．对于某一函数的原函数的求法，只能通过积分运算而求得．但积分法求其原函数一般是要利用较高的技巧和较多的公式方可完成．众所周知，原函数与导数是一对互逆概念，其运算是互逆运算，一般情况下不可能实现统一运算，更何况高阶导数与原函数．本文通过分析一类较为复杂函数的导数及其自身的结构特征，获得了在不需要任何分析运算条件下，可由该类函数的一阶导数及其自身的结构特征，迅速准确地推知该类函数的原函数及其高阶导数的结果．结果表明，高阶导数、原函数在一定条件下可实现统一．该研究结果适用的函数较复杂，同时该结果是文献[1]与文献[2]中主要结果的推广．为叙述方便起见，本文中所出现的符号 $y^{(-1)}$ 表示函数 y 的一个原函数；$y^{(n)}$ 表示函数 y 的 n 阶导数；$y^{(0)}$ 表示函数 y 自身．

1 高阶导数与原函数及函数的统一性结果

定理 设 $y=e^{kx}g(x)$，其中 $g(x)$ 可导，若 $y'=ke^{kx}[g(x+\frac{1}{k})+\alpha(x+\frac{1}{k})^3+\beta(x+\frac{1}{k})^2+\gamma(x+\frac{1}{k})+\delta]$，$(k\neq 0)$，则有

$$y^{(n)}=k^n e^{kx}[g(x+\frac{n}{k})+n\alpha(x+\frac{n}{k})^3+n\beta(x+\frac{n}{k})^2+(n\gamma+\frac{3n(1-n)}{2k^2}\alpha)(x+\frac{n}{k})+n\delta+\frac{n(n-1)}{k^3}\alpha+\frac{n(1-n)}{2k^2}\beta]\ (n=0,-1,1,2,\cdots n\cdots).$$

证明 (1) 当 $n=0$ 时，$y^{(0)}$ 显然是函数 y 结论成立．

(2) 当 $n=-1$ 时，只须证明定理公式右端为 y 的原函数即可．令 $x-\frac{1}{k}=u$，因为

$$\{k^{-1}e^{kx}[g(x-\frac{1}{k})-\alpha(x-\frac{1}{k})^3-\beta(x-\frac{1}{k})^2-(\gamma+\frac{3\alpha}{k^2})(x-\frac{1}{k})-\delta+\frac{2\alpha}{k^3}-\frac{1}{k^2}\beta]\}'=k^{-1}\{[e^{ku}g(u)]'_u\cdot u'_x-ke^{kx}[\alpha(x-\frac{1}{k})^2+\beta(x-\frac{1}{k})^2+(\gamma+\frac{3\alpha}{k^2})(x-\frac{1}{k})+\delta-\frac{2\alpha}{k^3}+\frac{\beta}{k^2}]-e^{kx}[3\alpha\cdot(x-\frac{1}{k})^3+2\beta(x-\frac{1}{k})+(\gamma+\frac{3}{k^2}\alpha)]\}=k^{-1}\cdot\{ke^{ku}[g(u+\frac{1}{k})+\alpha(u+\frac{1}{k})^3+\beta(u+\frac{1}{k})^2+\gamma\cdot(u+\frac{1}{k})+\delta]-ke^{kx}[\alpha(x-\frac{1}{k})^3+\beta(x-\frac{1}{k})^2+(\gamma+\frac{3\alpha}{k^2})(x-\frac{1}{k})+\delta-\frac{2\alpha}{k^3}+\frac{\beta}{k^2}]-e^{kx}[3\alpha(x-\frac{1}{k})^2+2\beta(x-\frac{1}{k})+(\gamma+\frac{3\alpha}{k^2})]\}=e^{kx}[g(x)+\alpha x^3$$

收稿日期：2000－10－16；修订日期：2000－11－24

基金项目：河南省自然科学基金资助项目(984050700)

作者简介：成立社(1963－)，男，陕西省武功县人，郑州工业大学讲师，主要从事函数论与微分方程方面的研究．

$+\beta x^2+\gamma x+\delta-\alpha(x-\frac{1}{k})^3-\beta(x-\frac{1}{k})^2-(\gamma+\frac{3\alpha}{k^2})(x-\frac{1}{k})-\delta+\frac{2\alpha}{k^3}-\frac{\beta}{k^2}-\frac{3\alpha}{k}(x-\frac{1}{k})^2-\frac{2\beta}{k}(x-\frac{1}{k})-\frac{1}{k}(\gamma+\frac{3\alpha}{k^2})]=e^{kx}g(x)$.

所以 $y^{(-1)}=k^{-1}e^{kx}[g(x-\frac{1}{k})-\alpha(x-\frac{1}{k})^3-\beta\cdot(x-\frac{1}{k})^2-(\gamma+\frac{3\alpha}{k^2})(x-\frac{1}{k})-\delta+\frac{2\alpha}{k^3}-\frac{1}{k^2}\beta]$成立.

(3) 当 $n\neq -1$ 时,用数学归纳法证. 由条件易知,当 $n=1$ 时结论显然成立.

假设当 $n=m-1$ 时,有

$$y^{(m-1)}=k^{m-1}e^{kx}[g(x+\frac{m-1}{k})+(m-1)\alpha\cdot(x+\frac{m-1}{k})^3+(m-1)\beta(x+\frac{m-1}{k})^2+((m-1)\cdot\gamma+\frac{3(m-1)(2-m)}{2k^2}\alpha)(x+\frac{m-1}{k})+(m-1)\delta+\frac{(m-1)(m-2)}{k^3}\alpha+\frac{(m-1)(2-m)}{2k^2}\beta].$$

为证明方便起见,令 $x+\frac{m-1}{k}=u$,即 $x=u-\frac{m}{k}+\frac{1}{k}$,因为 $y^{(m)}=[y^{(m-1)}]'=k^{m-1}\{e^{-m+1}[e^{ku}\cdot g(u)]'_u . u'_x+k(m-1)\alpha(x+\frac{m-1}{k})^3e^{kx}+3e^{kx}(m-1)\alpha(x+\frac{m-1}{k})^2+k(m-1)\beta(x+\frac{m-1}{k})^2e^{kx}+2e^{kx}(m-1)\beta(x+\frac{m-1}{k})+[k(m-1)\gamma+\frac{3(m-1)(2-m)}{2k^2}\alpha k]e^{kx}(x+\frac{m-1}{k})+e^{kx}[(m-1)\cdot\gamma+\frac{3(m-1)(2-m)}{2k^2}\alpha]+[k(m-1)\delta+\frac{(m-1)(m-2)}{k^3}\alpha k+\frac{(m-1)(2-m)}{2k^2}k\beta]e^{kx}\}=k^{m-1}\{e^{-m+1}ke^{ku}[g(u+\frac{1}{k})+\alpha(u+\frac{1}{k})^3+\beta(u+\frac{1}{k})^2+\gamma(u+\frac{1}{k})+\delta]+[k(m-1)\alpha(x+\frac{m-1}{k})^3+3(m-1)\alpha(x+\frac{m-1}{k})^2+k(m-1)\beta(x+\frac{m-1}{k})^2+2(m-1)\beta(x+\frac{m-1}{k})]e^{kx}+[k(m-1)\gamma+\frac{3(m-1)(2-m)}{2k}\alpha]e^{kx}(x+\frac{m-1}{k})+[(m-1)\gamma+\frac{3(m-1)(2-m)}{2k^2}\alpha+k(m-1)\delta+\frac{(m-1)(m-2)}{k^2}\alpha+\frac{(m-1)(2-m)}{2k}\beta]e^{kx}\}=k^me^{kx}\cdot\{g(x+\frac{m}{k})+\alpha(x+\frac{m}{k})^3+\beta(x+\frac{m}{k})^2+\gamma(x+\frac{m}{k})+\delta+(m-1)\alpha(x+\frac{m-1}{k})^3+\frac{3(m-1)\alpha}{k}(x+\frac{m-1}{k})^2+(m-1)\beta(x+\frac{m-1}{k})^2+\frac{2(m-1)\beta}{k}(x+\frac{m-1}{k})+[(m-1)\gamma+\frac{3(m-1)(2-m)}{2k^2}\alpha](x+\frac{m-1}{k})+\frac{(m-1)\gamma}{k}+\frac{3(m-1)(2-m)}{2k^3}\alpha+(m-1)\delta+\frac{(m-1)(m-2)}{k^3}\alpha+\frac{(m-1)(2-m)}{2k^2}\beta\}=k^me^{kx}\{g(x+\frac{m}{k})+\alpha(x+\frac{m}{k})^3+\beta(x+\frac{m}{k})^2+\gamma(x+\frac{m}{k})+\delta+(m-1)\alpha[(x+\frac{m}{k})^3-3(x+\frac{m}{k})^2\frac{1}{k}+3(x+\frac{m}{k})\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^3}]+\frac{3(m-1)\alpha}{k}[(x+\frac{m}{k})^2-2\cdot(x+\frac{m}{k})\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}]+(m-1)\beta[(x+\frac{m}{k})^2-2(x+\frac{m}{k})\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}]+\frac{2(m-1)\beta}{k}(x+\frac{m}{k})-\frac{2(m-1)\beta}{k^2}+[(m-1)\gamma+\frac{3(m-1)(2-m)}{2k^2}\alpha](x+\frac{m}{k})-\frac{(m-1)\gamma}{k}-\frac{3(m-1)(2-m)\alpha}{2k^3}+\frac{(m-1)\gamma}{k}+\frac{3(m-1)(2-m)}{2k^3}\alpha+(m-1)\delta+\frac{(m-1)(m-2)}{k^3}\cdot\alpha+\frac{(m-1)(2-m)}{2k^2}\beta\}=k^me^{kx}\{g(x+\frac{m}{k})+m\alpha(x+\frac{m}{k})^3+[\beta-\frac{3}{k}(m-1)\alpha+\frac{3(m-1)\alpha}{k}+(m-1)\cdot\beta]\cdot(x+\frac{m}{k})^2+[\gamma+\frac{3}{k^2}(m-1)\alpha-\frac{6(m-1)\alpha}{k^2}-\frac{2(m-1)\beta}{k}+\frac{2(m-1)}{k}\beta+(m-1)\gamma+\frac{3(m-1)(2-m)}{2k^2}\alpha](x+\frac{m}{k})-\frac{(m-1)\gamma}{k}-\frac{3(m-1)(2-m)\alpha}{2k^3}+m\delta+\frac{(1-m)\alpha}{k^3}+\frac{3(m-1)\alpha}{k^3}+\frac{(m-1)\beta}{k^2}-\frac{2(m-1)\beta}{k^2}+\frac{(m-1)\gamma}{k}+\frac{3(m-1)(2-m)}{2k^3}\alpha+\frac{(m-1)(m-2)}{k^3}\alpha+(m-1)\cdot\frac{(2-m)}{2k^2}\beta\}=k^me^{kx}\{g(x+\frac{m}{k})+m\alpha(x+\frac{m}{k})^3+m\beta\cdot(x+\frac{m}{k})^2+[\frac{3m(1-m)}{2k^2}\alpha+m\gamma](x+\frac{m}{k})+m\delta+\frac{m(m-1)}{k^3}\alpha+\frac{m(1-m)}{2k^2}\beta\}$. 所以,当 $n=m$ 时,结论成立.

综上述证明(1),(2),(3),即知定理成立.

该定理揭示出该类函数 $y^{(0)}$ 与其高阶导数 $y^{(n)}$ 及原函数 $y^{(-1)}$ 之间的关系可由一个公式统

一给出．由定理的结论可知，仅需知道该类函数的一阶导数 y' 的结构，便可简明快速地写出 $y^{(n)}$ 及 $y^{(-1)}$ 的结果，这为实际计算带来了很大的方便．

在上述定理中，若令 $\alpha=0$，该定理即为文献[1]中定理1′的结论；若令 $\alpha=\beta=\upsilon=0$，该定理即为文献[2]中定理2的结论；若令 $\alpha=\beta=\upsilon=0$ 且 $n=-1$ 时该定理即为文献[3]中定理8的结论．

2 算例

例 设 $y=e^{2x}(x^4+x^3+x^2+x+1)$，求 y 的 n 阶导数 $y^{(n)}$ 及其一个原函数 $y^{(-1)}$．

解 令 $g(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$，$y=e^{2x}\cdot g(x)$．因为 $y'=[e^{2x}g(x)]'=2e^{2x}(x^4+3x^3+\frac{5}{2}x^2+2x+\frac{3}{2})=2e^{2x}[(x+\frac{1}{2})^4+x^3+x^2+\frac{3}{2}x+\frac{23}{16}]=2e^{2x}[(x+\frac{1}{2})^4+(x+\frac{1}{2})^3-\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}\cdot(x+\frac{1}{2})+\frac{13}{16}]=2e^{2x}\{[(x+\frac{1}{2})^4+(x+\frac{1}{2})^3+(x+\frac{1}{2})^2+(x+\frac{1}{2})+1]-\frac{3}{2}(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}(x+\frac{1}{2})-\frac{3}{16}\}=2e^{2x}[g(x+\frac{1}{2})-\frac{3}{2}(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}(x+\frac{1}{2})-\frac{3}{16}]$

其中，$k=2$；$\alpha=0$；$\beta=-\frac{3}{2}$；$\gamma=\frac{1}{4}$；$\delta=-\frac{3}{16}$．

所以，由定理知 $y^{(n)}=2^ne^{2x}[g(x+\frac{n}{2})-\frac{3}{2}n\cdot(x+\frac{n}{2})^2+\frac{n}{4}(x+\frac{n}{2})-\frac{3n}{16}-\frac{3n(1-n)}{16}]=2^n\cdot e^{2x}[(x+\frac{n}{2})^4+(x+\frac{n}{2})^3+(x+\frac{n}{2})^2+(x+\frac{n}{2})+1-\frac{3n}{2}(x+\frac{n}{2})^2+\frac{n}{4}(x+\frac{n}{2})-\frac{3n}{16}-\frac{3n(1-n)}{16}]=2^ne^{2x}[(x+\frac{n}{2})^4+(x+\frac{n}{2})^3+(1-\frac{3n}{2})(x+\frac{n}{2})^2+(1+\frac{n}{4})(x+\frac{n}{2})+1+\frac{3n(n-2)}{16}]$ $(n=-1,1,2,3,\cdots)$．

3 结束语

本文研究了一类特殊函数 $y=e^{kx}g(x)$ 及其导数的结构特征．由此特征，可以简洁写出 $y^{(n)}$ 及 $y^{(-1)}$ 的结果，而不需要任何复杂的分析运算．由上述定理可以推猜，当 $y=e^{kx}g(x)$ 及 $y'=ke^{kx}[g(x+\frac{1}{k})+a_0(x+\frac{1}{k})^n+a_1(x+\frac{1}{k})^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(x+\frac{1}{k})+a_0]$ 时，也会有类似求 $y^{(n)}$ 及 $y^{(-1)}$ 的结果．推导证明由于较为冗长，不再陈述．

参考文献：

[1] 成立社．导数与原函数结构定理的注记[J]．郑州工业大学学报，1999，20(3)：42－44．

[2] 成立社．特殊类型函数高阶导数与原函数的统一公式[J]．工科数学，2000，16(3)：122－124．

[3] 纪乐刚．数学分析[M]．上海：华东师范大学出版社，1993．303．

[4] 宁荣健．定积分计算方法和技巧[J]．工科数学，1995，11(1)：199－203．

Study on the Unity of the Higher－order Derivation & Primary Function

CHENG Li-she[1]，LUO Man[2]

(1．Department of Mathematics，Physics & Mechanics，Zhengzhou University of Technology，Zhengzhou 450002，China；2．Department of Computer Science，Financial & Economical Institute of Henan，Zhengzhou 450002，China)

Abstract：In this paper，through analyzing the structural features of a kind of ralatively complicated functions' derivative and of this kind function itself，we deduce quickly and accurately the consequences of some kinds of functions' primary functions and their higher-order derivatives，without any analysis and opreation．The consequences of this research show that the higher-order derivative and its primary function，the two-way transformed counterparts，can be practically unified．Utilization of the consequences may just bring a lot of simplicity and conveniences in practical operation．

Key words：higher-order derivative；primary function；structural feature；unity