

文章编号:1671-6833(2002)02-0001-04

四边支承矩形板振形曲线及其正交性

许琪楼

( 郑州大学土木工程学院,河南 郑州 450002)

摘 要:主振方向排序法认为,板的振形曲线中振动波形在主振方向上是唯一的,在另一方向上是不唯一的,由此建立了四边支承矩形板精确的振形曲线表达式.这种振形曲线可以满足振动微分方程和全部边界条件,还具有振形的正交性.通过推导证明了振形正交性的存在,阐明了主振方向排序法的物理含义,从理论上说明了该方法的正确性.

关键词:弹性薄板;自由振动;振形正交性  
中图分类号:TU 311.3 文献标识码:A

1 主振方向及相应的振形函数表达式

板横向自由振动的微分方程为

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - \gamma^4 W = 0, \tag{1}$$

其中,

$$\gamma^4 = \omega^2 \frac{m}{D}. \tag{2}$$

式中:W 为自平衡位置算起的振形函数;ω 为板自由振动的圆频率;m 为板单位面积的质量;D 为板的弯曲刚度.振形函数 W 要体现板双向振动的特点,传统解法认为,W 的一般形式为

$$W = \sum_m f(y) \sin \frac{m\pi x}{a} + \sum_n g(x) \sin \frac{n\pi y}{b}. \tag{3}$$

式中  $\sin \frac{m\pi x}{a}$  和  $\sin \frac{n\pi y}{b}$  分别表示 x 方向与 y 方向的振动主波形.式(3)表示在两个振动方向上同时拥有无数的振动主波形.当引入边界条件后,这样的振形曲线由于不具有振形正交性的性质,因

而是错误的.如果振形曲线取下列形式

$$W = f(y) \sin \frac{m\pi x}{a} + g(x) \sin \frac{n\pi y}{b}, \tag{4}$$

该式表示在两个振动方向上分别仅有一个振动主波形,除图 1(a) 所示四边简支矩形板,图 1(b), (c) 所示一对边简支的矩形板外,式(4)无法满足全部边界条件,因而也是不可取的.文献[1] 提出主振方向排序法的思路以建立矩形板的振形函数表达式,这种振形函数表达式既可以满足全部边界条件,又具有振形的正交性.

在两个振动方向上任选一个振动主方向,主振方向的振动波形是唯一的,但为了保证振形曲线满足全部边界条件,在另一振动方向上振动波形不是唯一的.

对图 1 所示四边支承(简支或固定)的矩形板,当采用以 x 方向为主振方向排序时,对应 x 方向第 m 个主振波形(即  $\sin \frac{m\pi x}{a}$ ),振形函数表达式为

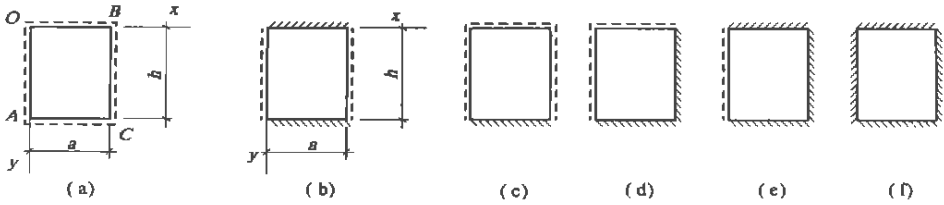


图 1 四边支承的矩形板  
Fig. 1 Plates with four edges supported

$$W = (A_n \sinh \alpha_1 y + B_n \cosh \alpha_1 y + C_n \sin \alpha_2 y + D_n \cos \alpha_2 y) \sin \alpha + \sum_{n < \frac{a}{\pi}} (E_n \sinh \beta_1 x + F_n \cosh \beta_1 x + G_n \sin \beta_2 x + H_n \cos \beta_2 x) \sin \beta + \sum_{n > \frac{a}{\pi}} (E_n \sinh \beta_1 x + F_n \cosh \beta_1 x + G_n \sinh \beta_3 x + H_n \cosh \beta_3 x) \sin \beta. \quad (5)$$

式中:  $\alpha = \frac{m\pi}{a}$ ,  $\alpha_1 = \sqrt{\gamma^2 + \alpha^2}$ ,  $\alpha_2 = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ ;  $\beta = \frac{n\pi}{b}$ ,  $\beta_1 = \sqrt{\gamma^2 + \beta^2}$ ,  $\beta_2 = \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}$ ,  $\beta_3 = \sqrt{\beta^2 - \gamma^2}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

式(5)中包含有8个待定系数,由板的8个边界条件及级数的正交性可建立以  $A_m, B_m, C_m, D_m, E_n, F_n, G_n, H_n$  为未知量的8个线性方程,通过变换可得仅包含  $A_m, B_m, C_m, D_m$  为未知量的4个齐次线性方程.为保证主振形具有非零解,  $A_m, B_m, C_m, D_m$  不能全为零,由此可建立频率方程,并解出  $x$  方向第  $m$  个主振形对应的各阶自振频率及相应的振形曲线,分别取  $m = 1, 2, 3, \dots$  即得以  $x$  方向为主振方向排序的所有振形.

当采用以  $y$  方向为主振方向排序时,对应  $y$  方向第  $n$  个主振形,振形函数表达式为

$$W = (E_n \sinh \beta_1 x + F_n \cosh \beta_1 x + G_n \sin \beta_2 x + H_n \cos \beta_2 x) \sin \beta + \sum_{m < \frac{a}{\pi}} (A_m \sinh \alpha_1 y + B_m \cosh \alpha_1 y + C_m \sin \alpha_2 y + D_m \cos \alpha_2 y) \sin \alpha + \sum_{m > \frac{a}{\pi}} (A_m \sinh \alpha_1 y + B_m \cosh \alpha_1 y + C_m \sinh \alpha_3 y + D_m \cosh \alpha_3 y) \sin \alpha, \quad (6)$$

式中:  $\alpha_3 = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$ ; 级数  $\sum_m \sin \alpha$  和  $\sum_n \sin \beta$  分别在  $[0, a]$  和  $[0, b]$  区间上具有正交性.

## 2 振形曲线的正交性

现以  $x$  方向为主振方向排序为例,将式(5)简写为

$$W = Y_1 X_1 + \sum_{n < N_i} X_2 Y_2 + \sum_{n > N_i} X_3 Y_2. \quad (7)$$

现分别考虑第  $i$  振形及第  $j$  振形,对应的主振波形分别为  $X_{i1} = \sin \frac{m_i \pi x}{a}$  和  $X_{j1} = \sin \frac{m_j \pi x}{a}$ ,  $m_i$  和  $m_j$  可能相等,也可能不相等,相应的振形常数分别为  $\gamma_i$  和  $\gamma_j$ . 有

$$W_i = Y_{i1} X_{i1} + \sum_{n < N_i} X_{i2} Y_{i2} + \sum_{n > N_i} X_{i3} Y_{i2}; \quad (8)$$

$$W_j = Y_{j1} X_{j1} + \sum_{n < N_j} X_{j2} Y_{j2} + \sum_{n > N_j} X_{j3} Y_{j2}; \quad (9)$$

式中:  $N_i = \frac{\gamma_i b}{\pi}$ ;  $N_j = \frac{\gamma_j b}{\pi}$ . 现设  $N_i < N_j$ , 由振动微

分方程有

$$\frac{\partial^4 W_i}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W_i}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W_i}{\partial y^4} = \gamma_i^4 W_i; \quad (10)$$

$$\frac{\partial^4 W_j}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W_j}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W_j}{\partial y^4} = \gamma_j^4 W_j. \quad (11)$$

式(10)乘  $W_j$ , 式(11)乘  $W_i$ , 并将这些乘积在整个板范围内积分,有

$$\int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^4 W_i}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W_i}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W_i}{\partial y^4} \right) W_j dx dy = \gamma_i^4 \int_0^a \int_0^b W_i W_j dx dy; \quad (12)$$

$$\int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^4 W_j}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W_j}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W_j}{\partial y^4} \right) W_i dx dy = \gamma_j^4 \int_0^a \int_0^b W_j W_i dx dy, \quad (13)$$

用式(12)减式(13),并考虑由  $x=0, x=a, y=0, y=b$  时  $W=0$  的边界条件及三角函数性质可得到下列关系式.

$$\begin{aligned} & \text{当 } x=0 \text{ 和 } x=a \text{ 时, 有} \\ & \begin{cases} X_{i1}=0, X_{i2}=0, X_{i3}=0, X_{i1}''=0; \\ X_{j1}=0, X_{j2}=0, X_{j3}=0, X_{j1}''=0. \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \text{当 } y=0 \text{ 和 } y=b \text{ 时, 有} \\ & Y_{i1}=0; Y_{j1}=0; Y_{i2}=0; Y_{j2}=0, \end{aligned} \quad (15)$$

以及

$$(\gamma_i^4 - \gamma_j^4) \int_0^a \int_0^b W_i W_j dx dy = R_1 + R_2 + R_3. \quad (16)$$

其中,

$$\begin{aligned} R_1 = & \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 W_i}{\partial x^4} W_j dx dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 W_j}{\partial x^4} W_i dx dy = \\ & - \sum_{n < N_i} [X_{i2} X_{j2}'] \int_0^b Y_{j1} Y_{i1} dy - \sum_{n > N_i} [X_{i3} X_{j3}'] \int_0^b Y_{j1} Y_{i1} dy + \sum_{n < N_j} [X_{j2} X_{i2}'] \int_0^b Y_{i1} Y_{j1} dy + \\ & \sum_{n > N_j} [X_{j3} X_{i3}'] \int_0^b Y_{i1} Y_{j1} dy + \\ & \sum_{n < N_i} \frac{b}{2} \{ [X_{j2} X_{j2}'] \int_0^b [X_{i2} X_{i2}'] \} + \\ & \sum_{N_i < n < N_j} \frac{b}{2} \{ [X_{j2} X_{i2}'] \int_0^b [X_{i2} X_{j2}'] \} + \\ & \sum_{n < N_j} \frac{b}{2} \{ [X_{j3} X_{i3}'] \int_0^b [X_{i3} X_{j3}'] \}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} R_2 = & 2 \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 W_i}{\partial x^2 \partial y^2} W_j dx dy - \\ & 2 \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 W_j}{\partial x^2 \partial y^2} W_i dx dy = 0; \end{aligned} \quad (18)$$

$$R_3 = \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 W_i}{\partial y^4} W_j dx dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 W_j}{\partial y^4} W_i dx dy$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n < N_i} [Y''_{j1} Y'_{j2}] \int_0^b X_{i2} X_j dx + \sum_{n > N_i} [Y''_{j1} Y'_{j2}] \int_0^b X_{i1} X_j dx - \\ &\int_0^a X_{i3} X_j dx - \sum_{n < N_j} [Y''_{i1} Y'_{j2}] \int_0^a X_{i1} X_j dx - \\ &\sum_{n > N_j} [Y''_{i1} Y'_{j2}] \int_0^a X_{i1} X_j dx + [Y''_{j1} Y'_{i1}] \int_0^b X_{i1} X_j dx - \\ &[Y''_{i1} X'_{j1}] \int_0^a X_{i1} X_j dx. \end{aligned} \tag{19}$$

当  $x=0$  或  $x=a$  为简支边时, 利用  $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0$  的边界条件可得:  $X''_{i2}=0, X''_{i3}=0, X''_{j2}=0, X''_{j3}=0$ , 相应的  $R_1$  为零值. 当  $x=0$  或  $x=a$  为固定边时, 利用  $\frac{\partial W}{\partial x}=0$  的边界条件, 得

$$Y_{i1} X'_{i1} + \sum_{n < N_i} X'_{i2} Y_2 + \sum_{n > N_i} X'_{i3} Y_2 = 0; \tag{20}$$

$$Y_{j1} X'_{j1} + \sum_{n < N_j} X'_{j2} Y_2 + \sum_{n > N_j} X'_{j3} Y_2 = 0. \tag{21}$$

式(20)乘  $\left(\sum_{n < N_j} X''_{j2} Y_2 + \sum_{n > N_j} X''_{j3} Y_2\right)$ , 式(21)乘  $\left(\sum_{n < N_i} X''_{i2} Y_2 + \sum_{n > N_i} X''_{i3} Y_2\right)$ , 由于  $X''_{j2}, X''_{j3}, X''_{i2}, X''_{i3}$  在  $x=0, x=a$  边界上均为定值, 将上述各乘积在  $[0, b]$  区间上积分, 利用级数的正交性, 并考虑  $N_i < N_j$ , 有

$$\begin{aligned} &\sum_{n < N_j} X'_{i1} X''_{j2} \int_0^b Y_{i1} Y_2 dy + \sum_{n > N_j} X'_{i1} X''_{j3} \int_0^b Y_{i1} Y_2 dy + \\ &\sum_{n < N_i} \frac{b}{2} X'_{i2} X''_{j2} + \sum_{N_i < n < N_j} \frac{b}{2} X'_{i3} X''_{j2} + \\ &\sum_{n > N_j} \frac{b}{2} X'_{i3} X''_{j3} = 0; \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{n < N_i} X'_{j1} X''_{i2} \int_0^b Y_{j1} Y_2 dy + \sum_{n > N_i} X'_{j1} X''_{i3} \int_0^b Y_{j1} Y_2 dy + \\ &\sum_{n < N_j} \frac{b}{2} X''_{i2} X'_{j2} + \sum_{N_j < n < N_i} \frac{b}{2} X'_{j2} X''_{i3} + \\ &\sum_{n > N_i} \frac{b}{2} X'_{j3} X''_{i3} = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

式(22)减式(23), 等式左端为  $R_1$  的表达式, 等式右端为零值, 说明若  $x=0$  或  $x=a$  为固定边时, 均有  $R_1=0$ , 即不论  $x=0$  和  $x=a$  为简支边还是固定边,  $R_1$  一定为零.

若  $y=0$  或  $y=b$  为简支边时, 由  $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=0$  的条件, 有  $Y''_{i1}=0, Y''_{j1}=0$ , 相应的  $R_3$  为零值. 若  $y=0$  或  $y=b$  为固定边时, 由  $\frac{\partial W}{\partial y}=0$  的条件, 有

$$Y'_{i1} X_{i1} + \sum_{n < N_i} X_{i2} Y'_2 + \sum_{n > N_i} X_{i3} Y'_2 = 0; \tag{24}$$

$$Y'_{j1} X_{j1} + \sum_{n < N_j} X_{j2} Y'_2 + \sum_{n > N_j} X_{j3} Y'_2 = 0. \tag{25}$$

式(24)乘  $Y''_{j1} X_{j1}$ , 式(25)乘  $Y''_{i1} X_{i1}$ , 由于在  $y=0$  和  $y=b$  时  $Y''_{j1}$  和  $Y''_{i1}$  均为定值, 将上述乘积在  $[0, a]$  区间上积分, 有

$$\begin{aligned} &Y''_{j1} Y'_{i1} \int_0^a X_{i1} X_j dx + \sum_{n < N_i} Y''_{j1} Y'_2 \int_0^a X_{i2} X_j dx + \\ &\sum_{n > N_i} Y''_{j1} Y'_2 \int_0^a X_{i3} X_j dx = 0; \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} &Y''_{i1} Y'_{j1} \int_0^a X_{j1} X_i dx + \sum_{n < N_j} Y''_{i1} Y'_2 \int_0^a X_{j2} X_i dx + \\ &\sum_{n > N_j} Y''_{i1} Y'_2 \int_0^a X_{j3} X_i dx = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

用式(26)减式(27), 等式左端即为  $R_3$  的表达式, 它等于零, 说明  $y=0$  或  $y=b$  为固定边时, 相应的  $R_3$  为零值, 即不论  $y=0$  和  $y=b$  是简支边还是固定边, 均有  $R_3=0$ .

由式(16), 并考虑  $x \neq y$ , 有

$$\int_0^a \int_0^b W_i W_j dx dy = 0. \tag{28}$$

式(28)表示满足边界条件后的第  $i$  振型和第  $j$  振形具有正交性. 如果  $N_i > N_j$  时, 上述正交性仍然成立, 当采用以  $y$  方向为主振方向排序时, 振形正交性也同样成立.

### 3 频率方程及振形曲线

#### 3.1 $x$ 方向为主振方向的振动

文献[1]导出了图1所示矩形板以  $x$  方向为主振方向排序时的频率方程, 对图1(a), (b), (c)所示  $x=0$  和  $x=a$  均为简支边的3种板, 与经典理论解相同. 文献[1]还计算了图1(d), (e), (f)3种方板各25个自振频率及相应的振形曲线图, 前6个频率及振形与有限元结果十分相近.

#### 3.2 $y$ 方向为主振方向的振动

文献[1]推导了图1所示矩形板以  $y$  方向为主振方向排序时的频率方程, 并证明了图1(b), (c)两种矩形板不发生这种振动. 这是由于这两种板在  $x=0$  和  $x=a$  两个边均为简支边, 当采用以  $x$  方向为主振方向排序时板只发生主振波形为  $\sin \frac{m\pi x}{a}$  的振动, 这种单一的振动波形可以满足全部边界条件, 不需要也不可能与  $\sin \frac{n\pi y}{b}$  的振动波形耦合. 但当采用  $y$  方向为主振方向计算时, 主振波形  $\sin \frac{n\pi y}{b}$  的振动不能单独满足全部边界条件, 也无法利用  $\sin \frac{m\pi x}{a}$  的振动与之耦合来满足

边界条件,因此该振动不会发生.

#### 4 主振方向排序法的物理含义

由计算结果可知,图 1(a) 所示四边简支矩形板可以任选一个主方向进行分析,振形曲线为单一的主振波形  $\sin \frac{m\pi x}{a}$  (或  $\sin \frac{n\pi y}{b}$ ) 的振动,二者结果是相同的.图 1(b), (c) 矩形板仅发生一对边简支方向为主振方向的振动,振动曲线为单一的主振波形  $\sin \frac{m\pi x}{a}$  的振动,图 1(d), (e), (f) 矩形板,也可任选一个主方向计算,结果是相同的.图 1(e) 所示的矩形板,当采用  $x$  方向为主振方向计算时,取  $m=2$ ,  $\omega_{m3}=158.46$ ; 当采用  $y$  方向为主振方向计算时,取  $n=3$ ,  $\omega_{n2}=159.22$ , 结果是十分相近的,且振形曲线图也十分相同,可以近似用下列曲线来描述:

$$W=f(y)\sin \frac{2\pi x}{a}+g(x)\sin \frac{3\pi y}{b}, \quad (29)$$

式(29)表示振动曲线在  $x$  方向上主要呈现  $\sin \frac{2\pi x}{a}$  波形,在  $y$  方向上主要呈现  $\sin \frac{3\pi y}{b}$  的波形,但是由于式(29)无法满足矩形板全部边界条件,因而它并不是精确的振形曲线,需要对式(29)进行修正或补充.补充方法有两种途径:一是保持第一项不变,将第二项改为  $\sum_n g(x)\sin \frac{n\pi y}{b}$ ; 二是保持第二项不变,将第一项改为  $\sum_m f(y)\sin \frac{m\pi x}{a}$ , 它们分别为式(5)和式(6)的表达形式,补充后的振形曲线既可以满足全部边界条件,又能保持振形的正交性,两种方法之所以计算结果相同是因为这

3 种矩形板在两个方向的振动是相互耦合的.

从数值计算过程中待定系数的相对值也可以看出上述规律性.当以  $x$  方向为主振方向计算时,与  $\omega_{m3}$  对应的式(5)中的系数  $E_3, F_3, G_3, H_3$  要比  $n$  为其它值时的  $E_n, F_n, G_n, H_n$  大很多,当以  $y$  方向为主振方向计算时,与  $\omega_{n2}$  对应的式(6)中的待定系数  $A_2, B_2, C_2, D_2$  要比  $m$  为其它值时  $A_m, B_m, C_m, D_m$  大很多.

#### 5 结论

(1) 主振方向排序法认为在主振方向上振动主波形是唯一的,在另一振动方向上要伴随产生与该主振形对应的耦合振动,该耦合振动所包含的振动波形形状、数量不是唯一的,由此建立的振形函数表达式既可以满足振动微分方程和全部边界条件,又具有振形的正交性,因此是对矩形板振动的精确描述.

(2) 一对边简支矩形板仅发生一对边简支方向为主振方向的振动,其余板的自由振动分析可任选一主方向进行,这是由于这些板两个方向的振动具有耦合性,故而具有两种描述方法.

(3) 为满足振动微分方程,无论是主振方向的主振波形,还是耦合方向的耦合波形,都要根据  $m$  与  $\frac{\chi}{\pi}$  的相对大小(或  $n$  与  $\frac{\gamma}{\pi}$  的相对大小)取不同的振动曲线形式.

#### 参考文献:

- [1] 许琪楼,王仁义,常少英.四边支承矩形板自由振动的精确解法[J].郑州工业大学学报,2001,22(1):1-5.
- [2] 徐芝纶.弹性力学[M].北京:高等教育出版社,1982.

### Vibration Mode Curve and Its Orthogonality of the Rectangular Plates with Four Edges Supported

XU Qitou

(College of Civil Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China)

**Abstract:** The arrangement method on the main vibration direction believes the vibration wave number in a vibration mode of the plate is unique at the main vibration direction and is not one at other direction. The accurate expressions of vibration mode curve of the rectangular plates with four edges supported are established with the method. The mode shape can satisfy the governing differential equation and all boundary conditions of plate and has the orthogonality relation. In this paper it is proved that the vibration mode is orthogonal and the physical meaning of the arrangement method is clarified. This clearly shows that the arrangement method above is theoretically correct.

**Key words:** elastic plate free vibration vibration mode orthogonality