

文章编号: 1671-6833(2002)02-0099-04

电磁场边界条件的一种新推导方法

吴 静¹, 雷银照²

(1. 郑州大学电气工程学院, 河南 郑州 450002; 2. 北京航空航天大学电气工程系, 北京 100083)

摘要: 对由不同媒质所组成的电磁场场域, 当分界面上场的散度源和旋度源不为零时, 场量将在分界面两侧发生突变, 通常使用的单一媒质区域中的斯托克斯公式不再适用这种情况. 推广了单一媒质中的斯托克斯公式, 得到了适用于多媒质区域的多曲面斯托克斯公式. 对于由不同媒质所组成的电磁场场域, 利用所推广的多曲面斯托克斯公式, 给出了电磁场边界条件的一种新的推导方法. 所推导的公式对于由多种媒质组成的矢量场有广泛应用.

关键词: 多曲面斯托克斯公式; 多区域高斯公式; 边界条件

中图分类号: TM 15 **文献标识码:** A

对于不同媒质所组成的区域, 由于在分界面上媒质参数会发生突变, 而且矢量场的面散度源和面旋度源^[1]可能不为零, 所以矢量场可能会发生突变, 此时如果仍利用单一媒质中的斯托克斯公式和高斯公式, 会得出一些不恰当的结论. 本文根据多区域高斯公式^[2], 推广了单一媒质中的斯托克斯公式. 在电磁场中, 人们遇到的大都是由多种媒质组成的场域, 因此多曲面斯托克斯公式和多区域高斯公式有广泛应用. 本文利用它们推导了电磁场的边界条件.

1 多区域斯托克斯公式

对于单一媒质中的矢量场, 斯托克斯公式可描述为^[3]: 设 S 是单连通的光滑曲面, 其边界 l 为分段光滑闭曲线, 沿 l 正向行进时保持 S 的正侧在左边, F 在 S 上有连续偏导数, 则

$$\oint_l F \cdot dl = \int_S (\nabla \times F) \cdot dS. \quad (1)$$

当区域中含有多种媒质时, 由于场量 F 在 S 内媒质的交界曲线上不一定存在连续偏导数, 所以斯托克斯公式中积分区域不能是含多媒质的曲面. 为了使其适用于多媒质区域, 我们对斯托克斯公式进行推广, 得到多曲面斯托克斯公式.

多曲面斯托克斯公式: 设外边界为 l 的曲面 S 由 m 个子曲面 S_1, S_2, \dots, S_m 所组成, 任意子曲面 S_i 的边界 l_i 为逐片光滑曲线, $i = 1, 2, \dots, m$. 若矢量 F_i 在 $l_i + S_i$ 上是连续可微函数, $i = 1, 2,$

\dots, m , 则下式成立:

$$\int_S (\nabla \times F) \cdot dS = \oint_l F \cdot dl + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \int_{l_{ij}} (F_i - F_j) \cdot dl_{ij}, \quad (2)$$

式中 l_{ij} 为任意两个子曲面 S_j 和 S_i 的公共边界线, 其方向是由 S_i 指向 S_j .

证明 由于

$$\begin{aligned} \oint_S (\nabla \times F) \cdot dS &= \int_{S_1} (\nabla \times F_1) \cdot dS_1 + \int_{S_2} (\nabla \times F_2) \cdot dS_2 + \dots + \int_{S_m} (\nabla \times F_m) \cdot dS_m \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{S_i} (\nabla \times F_i) \cdot dS_i, \end{aligned} \quad (3)$$

矢量 F_i 在 $l_i + S_i$ 上是连续可微的, $i = 1, 2, \dots, m$, 所以利用单一媒质中斯托克斯公式

$$\oint_{l_i} F_i \cdot dl_i = \int_{S_i} (\nabla \times F_i) \cdot dS_i, \quad (4)$$

可将式(3)写成

$$\int_S (\nabla \times F) \cdot dS = \sum_{i=1}^m \oint_{l_i} F_i \cdot dl_i = \int_{l_1+l_2+\dots+l_m} F \cdot dl. \quad (5)$$

上式右端的积分区域 $l_1+l_2+\dots+l_m$ 由两部分曲线之和所组成, 一部分是 S 内所有相邻子区域之间的公共边界线, 另一部分是整个曲面 S 的外部边界线, 考虑到曲线的方向, 线积分区域可写成

收稿日期: 2001-12-20; 修订日期: 2002-03-02

作者简介: 吴 静(1978-), 女, 安徽省萧县人, 郑州大学硕士研究生.

$$\begin{aligned}
 & l_1 + l_2 + \dots + l_m = [(l_{12} + l_{21}) + (l_{13} + l_{31}) + \\
 & \dots + (l_{1m} + l_{m1}) + (l_{23} + l_{32} + (l_{24} + l_{42}) + \dots + \\
 & (l_{2m} + l_{m2}) + \dots + (l_{m-1m} + l_{m(m-1)})] + l = \sum_{j=2}^m (l_j \\
 & + l_{j1}) + \sum_{j=3}^m (l_{2j} + l_{j2}) + \dots + \sum_{j=m}^m (l_{(m-1)j} + l_{j(m-1)}) \\
 & + l = \sum_{i=j}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m (l_{ij} + l_{ji}) + l, \quad (6)
 \end{aligned}$$

从而式(6)可写为

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \sum_{i=j}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \left(\int_{l_{ij}} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{l}_{ij} + \int_{l_{ji}} \mathbf{F}_j \cdot d\mathbf{l}_{ji} \right), \quad (7)$$

由

$$l_{ij} = -l_{ji}, \quad (8)$$

可知

$$l_{ij} = l_{ji}; \quad (9)$$

$$d\mathbf{l}_{ij} = -d\mathbf{l}_{ji}, \quad (10)$$

从而

$$\int_{l_{ji}} \mathbf{F}_j \cdot d\mathbf{l}_{ji} = - \int_{l_{ij}} \mathbf{F}_j \cdot d\mathbf{l}_{ij}. \quad (11)$$

这样,把式(11)代入式(7),便可得到多曲面斯托克斯公式(2).当 $m=1$ 时, S 成为单一媒质区域,式(2)右端的第二项等于零,此时式(2)与式(1)是一致的.

2 利用多曲面斯托克斯公式推导电磁场切向边界条件

无论是在含有单一媒质的区域中还是在含有多种媒质的区域中,宏观时变电磁场都满足如下积分形式的麦克斯韦方程组:

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i; \quad (12)$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \psi}{\partial t}; \quad (13)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0; \quad (14)$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q. \quad (15)$$

式中: l 为区域中的任意闭曲线; S 为区域中的任意闭曲面; \mathbf{B} 为磁通密度; \mathbf{D} 为电位移; ψ 为磁通; t 为时间; i 为闭曲线 l 所包围的电流; q 为闭曲面 S 所包围的电荷.当场量 $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{H}$ 在积分区域中存在连续偏导数时,各场量满足如下微分形式的麦克斯韦方程组:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_S + \mathbf{J}_E + \mathbf{J}_D = \mathbf{J}; \quad (16)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad (18)$$

$$\nabla \times \mathbf{D} = \rho, \quad (19)$$

式中: \mathbf{J}_S 为区域内外源的电流密度; \mathbf{J}_E 为导电媒质中的涡流密度; \mathbf{J}_D 为位移电流密度; ρ 为区域内自由电荷的等效体密度.

许多文献通过跨不同媒质分界面取一小矩形曲线,将积分形式的安培环路定律和法拉第电磁感应定律转化成微分形式^[4,3]来推导磁场强度 \mathbf{H} 和电场强度 \mathbf{E} 满足的切向边界条件.下面我们利用推广的多曲面斯托克斯公式直接通过积分形式的方程组推导切向边界条件.

如图1所示,跨两种媒质的分界面任取一曲面,对于该曲面,应用多曲面斯托克斯公式可得:

$$\begin{aligned}
 \int_{S_1+S_2} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} &= \oint_{l_1+l_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \\
 \int_{l_{12}} (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot d\mathbf{l}_{12}, \quad (20)
 \end{aligned}$$

l_{12} 的方向如图所示,上式又可写为

$$\begin{aligned}
 \int_{S_1+S_2} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} &= \oint_{l_1+l_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \\
 \int_{l_{12}} (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot d\mathbf{l}_{12}, \quad (21)
 \end{aligned}$$

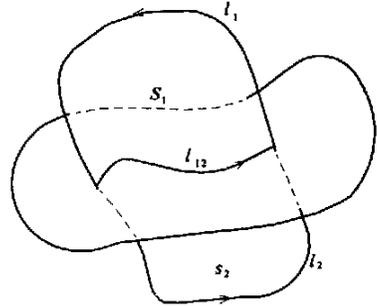


图1 跨分界面的任意曲面

Fig.2 Arbitrary surface across the interface

根据式(11)和(15),有

$$\begin{aligned}
 \oint_{l_1+l_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{S_1} \mathbf{J}_1 \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{J}_2 \cdot d\mathbf{S} + \\
 \int_{l_{12}} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l}_{12}, \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$\int_{S_1+S_2} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{J}_1 \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{J}_2 \cdot d\mathbf{S}, \quad (23)$$

式中: \mathbf{K} 为分界曲线上的电流面密度.把以上两式代入式(21),可得

$$\int_{l_{12}} (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot d\mathbf{l}_{12} = \int_{l_{12}} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l}_{12}, \quad (24)$$

由于 l_{12} 是边界上的任意曲线, 所以

$$H_2 - H_1 = K, \tag{25}$$

若 $K=0$, 则

$$H_1 = H_2. \tag{26}$$

同样我们把多曲面斯托克斯公式应用于式(13), 并结合微分形式的麦克斯韦方程(17), 可得到电场强度应满足的切向边界条件: $E_1 = E_2$.

3 利用多区域高斯公式推导电磁场法向边界条件

对于电磁场法向边界条件, 许多文献通过跨不同媒质分界面取一小圆柱体, 将积分形式的磁通连续性方程和电场的高斯定理转化成微分形式来推导磁感应强度 B 和电位移通量 D 满足的法向边界条件. 下面我们利用多区域高斯公式直接推导法向边界条件.

多区域高斯公式: 设外表面为 S 的区域 V 是由 m 个子区域 V_1, V_2, \dots, V_m 所组成, 任意子区域 V_i 的表面 S_i 为逐片光滑曲面, $i = 1, 2, \dots, m$. 若矢量 F_i 在 $V_i + S_i$ 上具有一阶连续偏导数, $i = 1, 2, \dots, m$, 则下式成立:

$$\int_V \nabla \cdot F dV = \oint_{\Gamma} F \cdot dS + \sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^m \int_{S_{ij}} (F_i - F_j) \cdot dS_{ij}, \tag{27}$$

式中: S_{ij} 为任意两个子区域 V_i 和 V_j 的公共界面, 其方向是由 V_i 指向 V_j . 如图2所示, 跨两种媒质的分界面任取一区域, 对于该区域, 利用多区域高斯公式可得

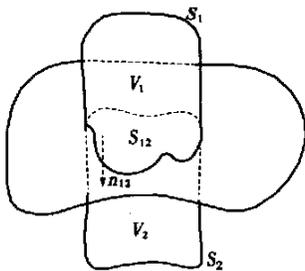


图2 跨分界面的任意区域

Fig. 2 Arbitrary region across the interface

$$\int_{V_1+V_2} \nabla \cdot D dV = \oint_{S_1+S_2} D \cdot dS + \int_{S_{12}} (D_1 - D_2) \cdot dS_{12}, \tag{28}$$

S_{12} 的方向由 V_1 指向 V_2 , 上式又可写为

$$\int_{V_1} \nabla \cdot D dV + \int_{V_2} \nabla \cdot D dV = \oint_{S_1+S_2} D \cdot dS +$$

$$\int_{S_{12}} (D_{1n} - D_{2n}) dS_{12}, \tag{29}$$

根据式(15)和(19), 有

$$\oint_{S_1+S_2} D \cdot dS = \int_{V_1} \rho V + \int_{V_2} \rho V + \int_{V_{12}} \rho V_{12}; \tag{30}$$

$$\int_{V_1} \nabla \cdot D dV + \int_{V_2} \nabla \cdot D dV = \int_{V_1} \rho V + \int_{V_2} \rho V, \tag{31}$$

式中: σ 为分界面上的自由电荷面密度. 将以上两式代入式(29), 可得

$$\int_{S_{12}} (D_{2n} - D_{1n}) dS_{12} = \int_{S_{12}} \rho dS_{12}, \tag{32}$$

由于曲面 S_{12} 是任意的, 所以

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \tag{33}$$

如果分界面上的自由电荷面密度 σ 为零, 则

$$D_{2n} = D_{1n}. \tag{34}$$

同样我们把多区域高斯公式应用于式(14), 并结合式(18), 可得到磁感应强度应满足的法向边界条件: $B_{1n} = B_{2n}$.

4 结论

本文根据多区域高斯公式, 推广了单一媒质中的斯托克斯公式, 得到了适用于多媒质区域的多曲面斯托克斯公式, 然后从电磁场基本约束方程出发, 对跨边界的任意区域, 应用多曲面斯托克斯公式和多区域高斯公式导出了电磁场量应满足的边界条件. 多曲面斯托克斯公式说明面旋度源可能引起场的切向分量突变; 多区域高斯公式说明面散度源可能引起场的法向分量突变. 如果没有偶极矩, 无散场的法向分量一定连续, 无旋场的切向分量一定连续, 对于调和场这两种突变都不存在.

参考文献:

- [1] 科恩 G A, 科恩 T M. 数学手册 [M]. 周民强, 孙山泽, 王跃东, 译. 北京: 工人出版社, 1987.
- [2] 雷银照. 时谐电磁场解析方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2000.
- [3] 《现代数学手册》编写组. 现代数学手册 [M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2000.
- [4] 冯慈璋. 电磁场 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1992.
- [5] 马信山, 张济世, 王平, 等. 电磁场基础 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1995.

A New Development for Boundary Conditions of Electromagnetic Field

WU Jing¹, LEI Yin-zhao²

(1. College of Electrical Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China; 2. Department of Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics & Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: For the electromagnetic field formed by different mediums, when the divergence source and the curl source on the interface are not zero, the field will change across the interface. The general Stokes formula for the single medium is not applicable to this case. The paper extends the formula and obtains Stokes formula suitable for multi-medium. For the vector field made by different mediums, we give a new method to develop the boundary conditions using the Stokes formula and Gauss formula for multi-medium. The method presented in the paper is more general. The formulae presented have more applications in vector field formed by multi-media.

Key words: multi surface Stokes formula; multi region Gauss formula; boundary condition

郑州大学两学科荣膺国家级重点学科

日前,郑州大学“凝聚态物理”、“材料加工工程”两学科被批准为国家重点学科,实现了河南省国家级重点学科“零”的突破,树立了河南省高等教育发展新的里程碑。

“凝聚态物理”和“材料加工工程”两学科是郑州大学“211工程”重点建设学科以及河南省重点学科。两学科经过多年建设,在基础设施、学术梯队、人才培养、科研攻关等方面已达到较高水平。

凝聚物理学科始建于1956年,1986年获硕士学位授予权,1998年获博士学位授予权,2000年经批准设立博士后科研流动站。该学科从1988年起一直是河南省重点学科,1996年在霍裕平院士的支持下,对该学科的研究方向作了重大调整,重点开展轻金属(铝)合金材料及薄膜、特种功能材料、激光、离子束和材料相互作用及加工等方面的研究工作,并先后建立了“河南省高校离子束诱变育种及生物工程重点学科开放实验室”、“河南省激光应用技术重点实验室”。目前,该学科有院士1人,博士生导师6人,教授11人,副教授13人,博士9人。“九五”期间,已完成重大科研项目数十项,发表学术论文200多篇,其中被SCI, EI, ISTP收录50多篇,取得了一批具有国际、国内先进水平的标志性成果。

材料加工工程学科是原化工部重点学科,拥有国家橡塑模具工程研究中心以及河南省模具、材料工程及装备重点学科开放实验室,现有院士1人,博士生导师7人,教授18人,副教授35人,博士21人,国家级突出贡献专家2人,入选国家“百千万人才工程”第一、二层次2人。该学科从1984年开始招收博士生,目前已培养博士27人。该学科拥有8100平方米实验室和价值7000万元的加工、测试、试验设备,主要开展高分子材料成型加工及模具技术、快速凝固合金材料及其制备技术、高温功能材料及其生产技术等5个方面的研究,已初步形成了以高分子材料加工、高温功能材料制备等为特色的培养高层次专门人才、解决材料加工及相关领域重大技术问题的产学研基地。目前,科研人员已完成了国家攀登计划、国家重点科技攻关、国家“863”计划、国家自然科学基金重点项目等重大科研开发项目100余项,获得国家科技进步二、三等奖等奖项20多项,取得了一批具有国际先进水平的研究成果。