文章编号:1671-6833(2002)04-0053-04

线性最优控制系统鲁棒性分析

沈宪章,张法全,邱道尹,岳永娟

(郑州大学电气工程学院,河南 郑州 450002)

摘 要:最优控制设计中所采用的数学模型与实际系统总有一定差别,据此设计出的控制参数与实际并不完全相符.针对这一问题,提出了分析线性最优控制系统稳定鲁棒性的一种方法.利用 Matlab 的专用控制函数工具,分析了系统中某些环节时间常数、放大倍数等参数变动以及加权矩阵的选择对系统鲁棒性的影响.仿真结果表明,该方法可具体分析出每个局部对系统稳定性的影响程度,有利于进行系统维护,保证系统安全.

关键词:鲁棒性;渐近稳定;线性最优控制;Matlab

中图分类号:TP 273.1 文献标识码:A

线性最优控制问题即 LQ(Linear Quadratic)问题,就是在系统的数学模型确定之后,利用系统的状态方程,选择适当的加权矩阵,采用综合最优控制 u^*,使某一性能指标为最优.但是,实际控制系统一般很难用精确不变的数学模型来描述,用来描述系统的数学模型总是和实际系统存在着差别.因此在最优控制系统设计完成后,系统的鲁棒性分析就显得至关重要.而在 LQ 调节问题中,无限时间状态调节器问题占有重要地位,并且有广泛的应用价值,同时也易于推广到有限时间输出调节器的分析与设计.因此,本文着重就无限时间状态调节器问题进行线性最优控制系统的稳定鲁棒性分析.

1 鲁棒性分析

给定线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

式中:A 和 B 分别为 $n \times n$ 和 $n \times p$ 实常阵;x 为 n 维状态,$x(0) = x_0$,$t \in [0, \infty)$;u 为 p 维输入,性能指标由泛函

$$J(u) = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u)\,dt \tag{2}$$

给出,其中加权矩阵 Q 为 $n \times n$ 正定对称常阵,R 为 $p \times p$ 正定对称常阵,且要求 $\{A, B\}$ 能控.

由最优控制理论知识,解得式(1),(2)的最优控制为

$$u(t) = -Kx(t), \tag{3}$$

其中,$K = R^{-1}B^T P$,P 为满足下述矩阵 Riccati 方程的正定对称阵:

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0,$$

将式(3)代入式(1)得

$$\dot{x} = (A - BK)x, \tag{4}$$

并且上式所表示的闭环系统是大范围渐近稳定的[1,2].

当控制系统参数变动时,引起 A,B 具有不确定性,成为 $A + \Delta A$,$B + \Delta B$,由于 $K = R^{-1}B^T P$,从而 K 成为 $K + \Delta K$,系统(4)成为

$$\dot{x} = [(A + \Delta A) - (B + \Delta B)(K + \Delta K)]x,$$

即

$$\dot{x} = (A - BK + \Delta A - \Delta BK - B\Delta K - \Delta B\Delta K)x,$$

令

$$\begin{cases} A_k = A - BK, \\ \Delta A_k = \Delta A - \Delta BK - B\Delta K - \Delta B\Delta K, \end{cases} \tag{5}$$

由式(5)得

$$\dot{x} = (A_k + \Delta A_k)x. \tag{6}$$

由于 ΔA,ΔB,ΔK 是实际控制系统参数变动引起的,故均为实数阵,因此 ΔA_k 也是实数阵.

以下分析式(6)的鲁棒性.

引理 1[2] 线性定常系统 $\dot{x} = Ax$,$x(0) = x_0$,$t \geq 0$ 的零平衡状态 $x_e = 0$ 为渐近稳定的充分必

收稿日期:2002-07-12;修订日期:2002-08-20

基金项目:河南省自然科学基金资助项目(0111060300)

作者简介:沈宪章(1945-),男,浙江省杭州市人,郑州大学教授,硕士,主要从事控制理论与控制工程方面的研究.

要条件,是对任意给定的一个正定对称矩阵 Q,如下形式的李亚普诺夫矩阵方程

$$A^{\mathrm{T}}P + PA = -Q,$$

有唯一正定对称矩阵解 P.

系统是否为渐近稳定,和 Q 阵的选取无关,因此为简便起见,一般选 $Q = I$.

引理2[3] 设 $A \in R^{n\times n}$,则 A 是实对称矩阵的充要条件是存在正交矩阵 U,使得

$$U^{\mathrm{T}}AU = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n),$$

其中,$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 均为实数.

定理 若 A_k 为渐近稳定,则当 $\lambda_{\max}(\Delta A_k^{\mathrm{T}}S + S\Delta A_k) < 1$ 时,式(6)仍为渐近稳定. 其中,$\lambda_{\max}(\Delta A_k^{\mathrm{T}}S + S\Delta A_k)$表示矩阵 $\Delta A_k^{\mathrm{T}}S + S\Delta A_k$ 的最大特征值,正定对称阵 S 满足李亚普诺夫矩阵方程

$$A_k^{\mathrm{T}}S + SA_k = -I. \qquad (7)$$

证:因为 A_k 渐近稳定,由引理1知,方程(7)的解 S 存在且唯一.

取李亚普诺夫函数 $V(x) = X^{\mathrm{T}}SX$,因 S 正定,所以 $V(x)$为正定.

$$\dot{V}(x) = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dot{X}^{\mathrm{T}}SX + X^{\mathrm{T}}S\dot{X} = X^{\mathrm{T}}(A_k^{\mathrm{T}}S + SA_k + \Delta A_k^{\mathrm{T}}S + S\Delta A_k)X = X^{\mathrm{T}}(-I + \Delta A_k^{\mathrm{T}}S + S\Delta A_k)X\Delta = -X^{\mathrm{T}}[I - (\Delta A_k^{\mathrm{T}}S + S\Delta A_k)]X,$$

因为 $(\Delta A_k^{\mathrm{T}}S + S\Delta A_k)^{\mathrm{T}} = S^{\mathrm{T}}\Delta A_k^{\mathrm{T}} + \Delta A_k^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}} = \Delta A_k^{\mathrm{T}}S + S\Delta A_k$,所以 $\Delta A_k^{\mathrm{T}}S + S\Delta A_k$ 为实对称阵.

由引理2可知,存在正交矩阵 U,使得

$$\Delta A_k^{\mathrm{T}}S + S\Delta A_k = U^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)U,$$

其中:$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为矩阵 $\Delta A_k^{\mathrm{T}}S + S\Delta A_k$ 的特征值,且均为实数.

$$I - (\Delta A_k^{\mathrm{T}}S + S\Delta A_k) = U^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & & & \\ & 1-\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1-\lambda_n \end{bmatrix}U,$$

令 $\lambda_{\max} = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$,当 $\lambda_{\max} < 1$ 时,$1-\lambda_1, 1-\lambda_2, \cdots, 1-\lambda_n$ 均大于0,所以 $I - (\Delta A_k^{\mathrm{T}}S + S\Delta A_k)$为正定,即 $I - (\Delta A_k^{\mathrm{T}}S + S\Delta A_k) > 0$,从而 $\dot{V}(x) < 0$,即 $\dot{V}(x)$为负定.

由李亚普诺夫稳定判别定理得,系统(6)仍为渐近稳定[4].

2 实例分析

从上面的鲁棒性分析可以看出,需要求解 Riccati 矩阵方程与李亚普诺夫矩阵方程,但是求解过程相当困难. Matlab 提供了强大的矩阵处理与绘图功能,它带有许多具有特殊功能的工具箱,其中的控制系统工具箱功能强大,用 eig( )函数求解矩阵特征值,用 lqr( )函数求解 Riccati 矩阵方程,为分析和计算提供了极大的方便,所以本文采用 Matlab 6.0 实现仿真分析[5].

以实际系统为例. 由发电机、励磁机和副励磁机等构成的大型励磁系统的低阶模型如图1所示,模型参数为:$T_1 = 5$ s,$T_2 = 2$ s,$a_1 = 2.5$,$a_2 = 3.2$,$a_3 = 2.2$,$a_4 = 2$,$a_5 = 5$.

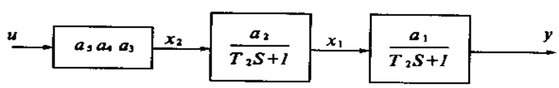

图1 大型励磁系统的低阶模型

Fig.1 Low order model of large - scale excitation system

其状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{T_1} & \dfrac{a_1}{T_1} \\ 0 & -\dfrac{1}{T_2} \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{a}{T_2} \end{bmatrix}u,$$

$$a = a_2a_3a_4a_5.$$

为简便起见,选取 $Q = \mathrm{diag}(1,1)$,$R = 1$. 运用上述理论对该系统进行二次型最优控制设计,得到系统(4),下面按照定理进行鲁棒性分析.

2.1 时间常数变化对系统鲁棒性的影响

图2和图3是时间常数 T_1,T_2 变化时,矩阵 $\Delta A_k^{\mathrm{T}}S + S\Delta A_k$ 的特征值随之变化的曲线. 可以看出在系统稳定的前提下,T_1,T_2 允许向增大的方向一定范围内变动,向减小的方向变化时,允许范围较大,当 T_1,T_2 太大时,可能引起系统不稳定.

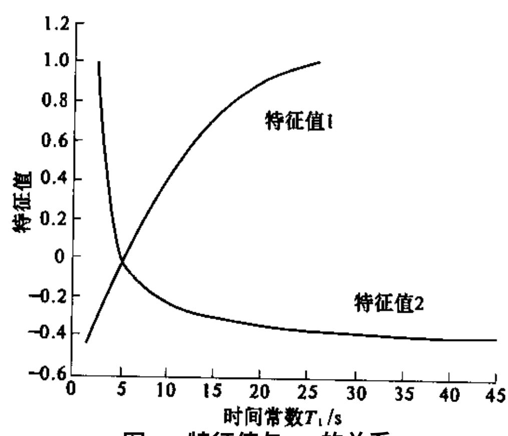

图2 特征值与 T_1 的关系

Fig.2 Relation of eigenvalues and T_1

2.2 放大倍数变化对系统鲁棒性的影响

图4和图5是放大倍数 a_1,a_2 变化时,矩阵 $\Delta A_k^{\mathrm{T}}S + S\Delta A_k$ 的特征值随之变化的曲线. 从图中

可知，a_1 可在 -5.3 至 6 之间变动，a_2 可在小于 4 的大范围内变动.

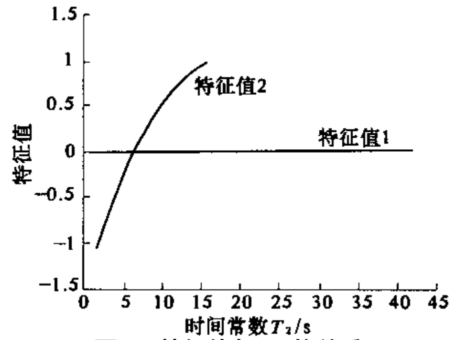

图 3　特征值与 T_2 的关系

Fig.3　Relation of eigenvalues and T_2

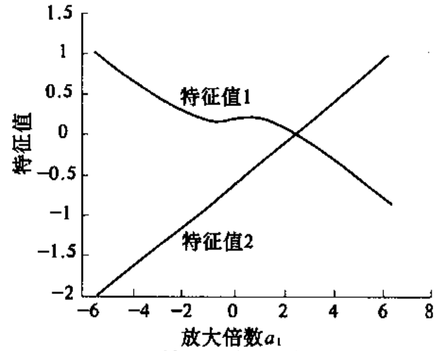

图 4　特征值与 a_1 的关系

Fig.4　Relation of eigenvalues and a_1

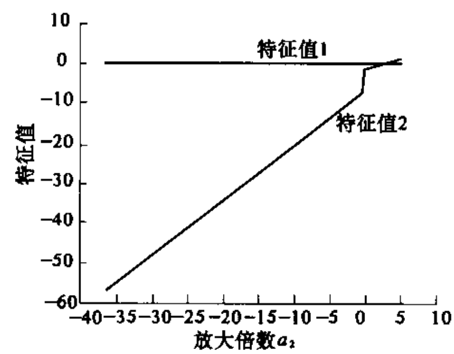

图 5　特征值与 a_1 的关系

Fig.5　Relation of eigenvalues and a_2

2.3　加权矩阵的选择对系统鲁棒性的影响

对于同一控制对象设计最优调节器时，加权矩阵 Q 和 R 的选择不同，系统的动态性能也不一样. 研究表明：①加权矩阵 Q 固定时，随着 R 中相应元素的增大，系统的上升时间减少，稳态误差减小，但系统的超调量却增大，过渡过程时间延长. ②加权矩阵 R 固定时，随着 Q 中相应元素的增大，系统的上升时间延长，稳态误差增大，但系统的超调量与过渡过程时间却减小了. 加权矩阵 R，Q 的选取，可根据实际系统对上升时间、超调量、过渡过程时间等具体指标的要求选择合适的加权矩阵.

加权矩阵一旦选定后，其参数不会随着系统的某些环节的参数变动而改变. 但由于系统数学模型的不确定性，有时系统设计完成后，需要根据实际更改参数的权值.

图 6 和图 7 是加权矩阵 Q 的参数变化引起矩阵 $\Delta A_k^{\mathrm{T}}S+S\Delta A_k$ 的特征值变化的曲线（$Q(i,j)$表示矩阵 Q 的第 i 行第 j 列元素）. 两者的趋势一样，但允许的变化范围稍有所不同. 图 8 是加权矩阵 R 的变化引起矩阵 $\Delta A_k^{\mathrm{T}}S+S\Delta A_k$ 的特征值变化的曲线. 可以看出，R 允许向增大的方向大范围变动，而向减小的方向变动时，极易引起系统不稳定.

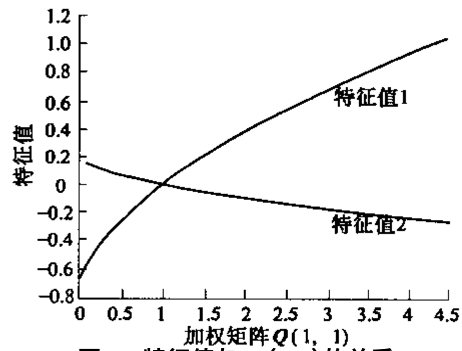

图 6　特征值与 $Q(1,1)$的关系

Fig.6　Relation of eigenvalues and $Q(1,1)$

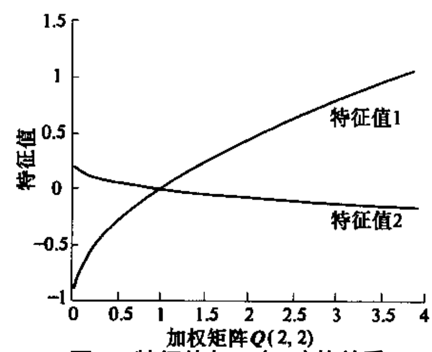

图 7　特征值与 $Q(2,2)$的关系

Fig.7　Relation of eigenvalues and $Q(2,2)$

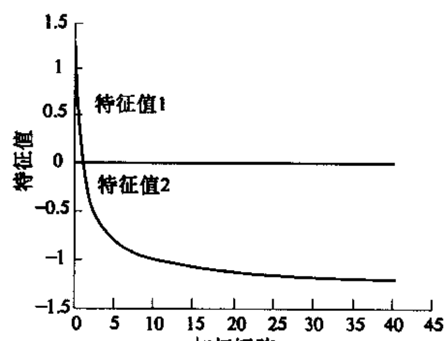

图 8　特征值与 R 的关系

Fig.8　Relation of eigenvalues and R

3　结束语

本文提出的判定最优控制系统鲁棒性的方

法,可以分析系统中单一环节参数变动对系统鲁棒性的影响,该法也适用于系统中多个参数变动时的情况,因而具有普遍适用性.根据最优控制原理设计的控制系统,可以保证渐近稳定性,但由于数学模型的不确定性以及实际物理器件的老化、系统的机械磨损等其它原因引起的参数变动,常会影响到系统的稳定性,通过本文介绍的方法及分析工具,可以具体分析出每个局部对系统稳定性的影响程度,从而在系统运行中,对有重大影响的部件进行重点维护,同时对影响程度较低的部件可降低要求,在保证系统稳定、可靠运行的前提下降低生产成本.

参考文献:

[1] 吴受章.应用最优控制[M].西安:西安交通大学出版社,1987.

[2] 郑大钟.线性系统理论[M].北京:清华大学出版社,2000.

[3] 戴 华.矩阵论[M].北京:科学出版社,2001.

[4] 沈宪章,刘晓兰,吴天福.具有大纯滞后系统控制算法的研究[J].郑州工业大学学报,1997,18(2):13-16.

[5] 王 华.Matlab在电信工程中的应用[M].北京:中国水利水电出版社,2001.

[6] 冯冬青,崔 玮,杨秀红.线性最优控制系统加权矩阵的仿真研究[J].郑州工业大学学报,2000,21(1):11-14.

Analysis of Robustness of the Optimal Linear System

SHEN Xian-zhang, ZHANG Fa-quan, QIU Dao-yin, YUE Yong-juan

(College of Electric Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China)

Abstract: The paper proposes a method of analyzing the robustness of the optimal linear system with the view of solving the problem that the control parameters don't meet the necessity of the practical system because the mathematical model adopted in the design of the optimal control system is different from the practical system. It analyzes the effects of the robustness that certain parameter shifts including time constant and enlargement factor and the choice of weighted matrix in certain segment cause The simulation results show that it can analyze specifically to what degree that each part influences the whole system and it is in favor of the system maintenance and safety.

Key words: robustness; asymptotic stability; optimal linear control; Matlab