

# 基于 Matlab 的线性最优控制系统鲁棒性分析

马书磊, 冯冬青, 陈铁军, 万红

(郑州大学电气工程学院, 河南 郑州 450002)

**摘 要:** 针对线性最优控制系统的鲁棒性分析问题, 提出以系统稳定裕度作为计算对象, 研究系统参数与稳定裕度之间的动态关系, 从而得出系统鲁棒性的直观描述. 这一方法采用 Matlab 的控制函数编制程序, 连续求解代数 Riccati 方程, 得出系统稳定裕度随参数扰动的变化趋势, 再由计算机作图显示. 仿真结果表明, 它对具有精确数学模型的最优控制系统的分析有实用价值.

**关键词:** 鲁棒性; 裕度; Matlab

**中图分类号:** TP 273 **文献标识码:** A

最优控制理论中的无限时间状态调节器问题在 LQR 问题中占据重要的地位, 并有广泛的应用价值, 同时也可以推广到无限时间输出调节器的分析与设计中<sup>[1]</sup>. 而一个控制系统的稳定性分析是系统设计时必不可少的关键环节, 尤其在系统参数可能发生变化时更是如此. 本文介绍一种利用 Matlab 为被控系统设计最优状态反馈, 并提供各种参数摄动情况下动态计算系统的相角裕度与幅值裕度的软件实现方法, 然后就实际应用中的有关问题进行讨论.

## 1 鲁棒性分析原理

线性系统理论中给出了用相角裕度与幅值裕度衡量最优控制系统鲁棒性的有关概念, 并得出结论: 线性定常连续系统无限时间调节器具有至少 60° 的相角裕度与 1/2 以上的幅值裕度(加权矩阵  $R$  为对角阵)<sup>[2]</sup>. 这一结论虽然具有理论指导意义, 但无法分析具体控制系统的各种结构参数变化对系统稳定性产生的影响. 目前, 计算机的运算速度大大加快, 已经可以满足解较高阶矩阵方程的需要, 因此, 应用有关工具软件, 可以先求出反馈阵  $K$ , 然后计算  $A, B$  阵中参数取不同值时的相角裕度  $\gamma$ 、幅值裕度  $h$ , 并以此作为系统动态鲁棒性的指标. 这一指标随参数的变化也可以绘制成曲线, 用以研究系统的变化趋势.

为求稳定裕度, 给定线性定常系统  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $x(0) = x_0, t \in [0, \infty)$ , 选择加权矩阵  $Q, R$ ,

由泛函  $J(u) = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$  解得  $u(t) = -Kx(t)$ ,  $K = R^{-1} B^T P$ . 其中:  $\{A, B\}$  能控;  $\{A, Q^{1/2}\}$  能观测;  $P$  满足方程  $PA + A^T P + Q - PBR^{-1} B^T P = 0$ , 得最优调节系统动态方程为:  $\dot{x} = [A - BK]x$ , 此系统为大范围渐近稳定的. SISO 情况下, 矩阵  $K, B$  变为向量  $k, b$ ;  $R$  变为标量  $\rho$ , 此时系统开环传递函数为:  $g(s) = k(sI - A)^{-1}b$ , 其相应频率特性为

$$g(j\omega) = k(j\omega I - A)^{-1}b. \quad (1)$$

式中:  $A, B$  由系统结构决定;  $k$  由最优性能指标解得, 所以  $\gamma$  和  $h$  有确定的值.

由方程  $|g(j\omega_c)| = 1$ , 解得截止频率  $\omega_c$ ; 由方程  $\angle g(j\omega_x) = (2k + 1)\pi$ , 解得相角交界频率  $\omega_x$ . 则相角裕度与幅值裕度分别为

$$\gamma = 180^\circ + \angle g(j\omega_c); \quad (2)$$

$$h = \frac{1}{|g(j\omega_x)|}. \quad (3)$$

系统中某些时间常数与  $A$  中元素具有确定的对应关系, 通过在某一取值范围内以一定步距改变  $A$  中个别元素的值, 同时保持  $k, b$  不变, 可模拟系统对应的时间常数摄动的情况, 此时将  $A, b, k$  的值代入式(1)中, 并由式(2)(3)计算得出不同的  $\gamma, h$ . 通过对这些值的大小和趋势进行分析, 可以看出所取时间常数对系统鲁棒稳定性的影响<sup>[3]</sup>. 同理, 对  $b$  中元素也可进行类似的操作.

2 程序实现

程序采用 MATLAB 6.0 编制,具体功能的实现包括:①求解最优反馈阵  $K$ ,可通过使用 MATLAB 函数 `lqr` 直接得到.②计算最优反馈时系统的开环稳定裕度,由函数 `margin` 实现.③选择矩阵参数,并实现等步距数据输出与绘图,这是关键环节.因此,以  $A$ 、 $b$  阵中某一参数为中心,以选定步距分别向正负方向变化来求解系统的相角裕度和幅值裕度,然后将输出结果绘制成曲线.

程序循环过程的结束是通过判断当前参数下系统是否稳定来实现的,系统第一次闭环失稳,则终止循环,但在某些情况下,矩阵  $A$ 、 $b$  中的一些参数在单减时系统始终保持稳定,此时程序将陷入无限循环.为此,加入另一终止循环条件,即循环次数超上限,则终止循环.程序结构如图 1 所示.

3 实例与分析

给定线性定常系统  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,其中  $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ .选择加权矩阵  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,

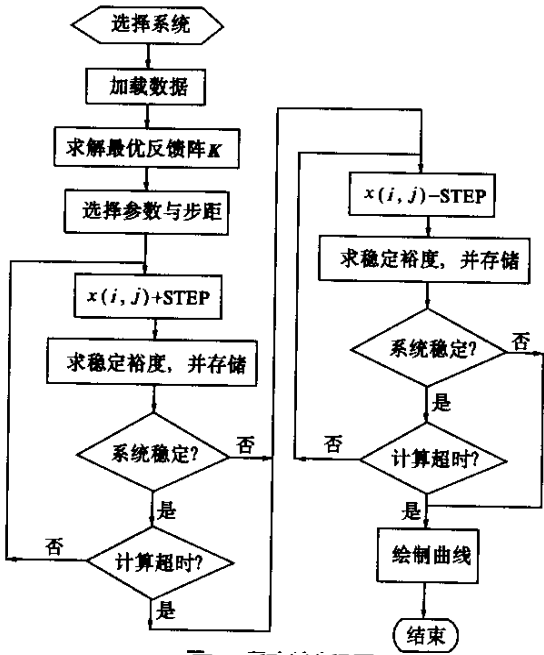


图 1 程序流程图

Fig.1 Flow diagram of program

$R = 10$ .运行程序后,首先解得最优反馈阵  $K = [8.0828 \ 0.0044]$ ,然后输入参数并选择最后输出的曲线.几条典型曲线如图 2 所示.

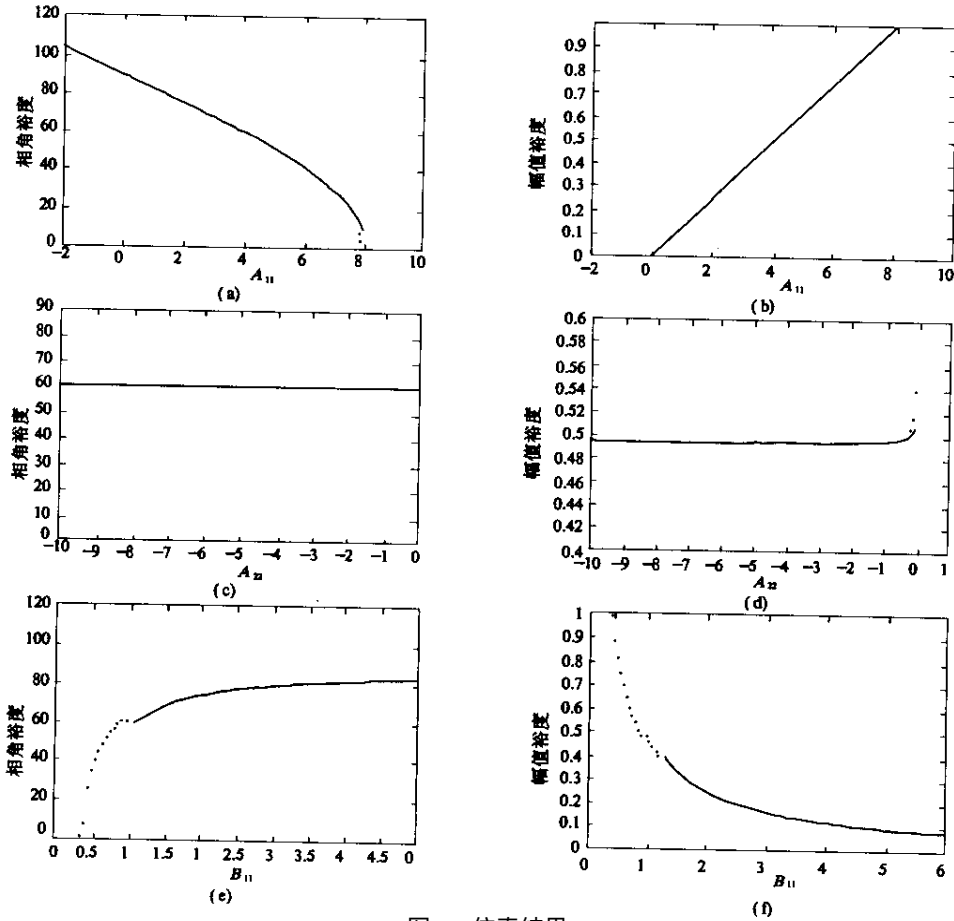


图 2 仿真结果

Fig.2 Results of simulation

由仿真结果可见,  $A_{11}$ ,  $B_{11}$  对系统稳定裕度的影响是很明显的, 而  $A_{22}$  在相当大的范围内变化时, 系统的稳定裕度并无显著波动。

对于 MIMO 系统, 当具有  $n$  个输入时, 最优反馈系统的开环传递函数矩阵为  $n \times n$  矩阵, 此矩阵的每一元素  $g_{ij}$  代表第  $i$  个输入到第  $j$  个输出的传递函数<sup>[4]</sup>。由于 Matlab 没有适用于 MIMO 系统的函数, 所以只能利用  $\text{margin}()$  函数的另外一种形式  $\text{margin}(\text{num}, \text{den})$  计算出每一分支对应子系统的稳定裕度, 从而实现对整个系统的分析。

对于采用机理建模的系统, 其系统参数矩阵的组成元素并不是孤立的, 他们往往以一定的结合方式同时受控于一个或几个元件, 而当某一元件参数发生变化时, 则可能会带来矩阵中几个参数的变化。

举一个简单的例子: 如图 3 所示电路, 选取状态变量为:  $x_1 = i$ ,  $x_2 = u_c$ , 则其状态方程可表示为:  $\dot{x} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u$ , 其中,  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $B_{11}$  的表达式中都含有  $L$ , 所以  $L$  的变化将会对这三个参数同时产生影响。所以, 用 Matlab 分析系统鲁棒性时, 必须事先将状态方程的解析式输入计算机, 才能动态跟踪元件参数对输出数据的影响。

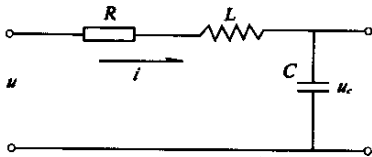


图3 RLC 网络

Fig.3 A RLC network

## 4 结束语

线性最优反馈控制系统设计完成后, 可以保证渐近稳定性及较大的稳定裕量, 所以对它进行鲁棒稳定性分析具有较高的参考价值。本文介绍的程序作为一种分析工具, 充分发挥了计算机高速数据处理的特长, 既方便了理论研究, 又有一定的实用价值。通过对输出曲线进行综合分析, 可以得出选择系统组成元件的参考依据, 对于那些明显影响系统稳定性的元件, 应提高精度和可靠性要求, 反之则可适当降低要求, 从而兼顾了系统性能与经济指标。

## 参考文献:

- [1] 冯冬青, 崔 崑, 杨秀红. 线性最优控制系统加权矩阵的仿真研究[J]. 郑州工业大学学报, 2000, 21(1): 11-14.
- [2] CHEN Chi-tsong. Analysis and Synthesis of Linear Control Systems[M]. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1975.
- [3] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 1990.
- [4] 吴受章. 应用最优控制[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1987.

## Robustness Analysis of Linear Optimal Control System with Matlab

MA Shu-lei, FENG Dong-qing, CHEN Tie-jun, WAN Hong

(College of Electric Engineering Zhengzhou University Zhengzhou 450002, China)

**Abstract:** For the purpose of analyzing robustness of linear optimal control system, this article introduces a method that takes the stability margin as an object calculated and researches its dynamic relations with parameters of this system, then comes up with a direct description for the system robustness. This method makes use of the control functions of Matlab to program and continuously resolves Riccati algebra equation to preview the trend of system stability margin changed by the parameters and shows results with diagrams in computer. Simulation result shows that it is practical for analysis of optimal control systems with accurate math model.

**Key words:** robustness; margin; Matlab